# Classification des triples de Manin pour les algèbres de Lie réductives complexes

Patrick Delorme

February 1, 2008

# 0 Introduction

Let  $\mathfrak{g}$  be a finite dimensional, complex, reductive Lie algebra. One says that a symmetric,  $\mathfrak{g}$ -invariant,  $\mathbb{R}(\text{resp. }\mathbb{C})$ -bilinear form on  $\mathfrak{g}$  is a **Manin form** if and only if its signature is  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g})$  (resp. is non degenerate).

Recall that a **Manin-triple** in  $\mathfrak{g}$  is a triple  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ , where B is a real (resp. complex) Manin form and where  $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$  are real (resp. complex) Lie subalgebras of  $\mathfrak{g}$ , isotropic for B, and such that  $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}' = \mathfrak{g}$ . Then this is a direct sum and  $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$  are of real dimension equal to the complex dimension of  $\mathfrak{g}$ .

Our goal is to classify all Manin-triples of  $\mathfrak{g}$ , up to conjugacy under the action on  $\mathfrak{g}$  of the connected, simply connected Lie group G with Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , by induction on the rank of the derived algebra of  $\mathfrak{g}$ .

One calls **af-involution** (resp. f-involution) of a complex semi-simple Lie algebra  $\mathfrak{m}$ , any  $\mathbb{R}$ (resp.  $\mathbb{C}$ )-linear involutive automorphism of  $\mathfrak{m}$ ,  $\sigma$ , such that there exists:

- 1) an ideal  $\tilde{\mathfrak{m}}_0$  of  $\mathfrak{m}$ , which is reduced to zero for f-involutions, and a real form  $\tilde{\mathfrak{h}}_0$  of  $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ ,
- 2) simple ideals of  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}'_j$ ,  $\mathfrak{m}''_j$ ,  $j = 1, \ldots, p$ ,
- 3) an isomorphism of complex Lie algebras,  $\tau_j$ , between  $\mathfrak{m}'_j$  and  $\mathfrak{m}''_j$ ,  $j=1,\ldots,p$ ,

such that, denoting by  $\mathfrak{h}_j := \{(X, \tau_j(X)) | X \in \mathfrak{m}'_j\}$ , and by  $\mathfrak{h}$  the fixed point set of  $\sigma$ , one has :

$$\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}}_0 \oplus (\oplus_{j=1,\dots,p} (\mathfrak{m}'_j \oplus \mathfrak{m}''_j))$$
$$\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{h}}_0 \oplus (\oplus_{j=1,\dots,p} \mathfrak{h}_j)$$

Notice that an  $\mathbb{R}$ -linear involutive automorphism of  $\mathfrak{m}$  is determined by its fixed point set, as the set of antiinvariant points is just the orhogonal of the fixed point set, for the Killing form of  $\mathfrak{m}$ , viewed as a real Lie algebra. The following Theorem generalizes previous results of E.Karolinsky (cf [K2], Theorem 1 (i) and [K1] for the proof, see also [K3] Proposition 3.1), as we do not make any restriction on the Manin form. If we are dealing with  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-bilinear Manin form, Manin triple will mean real (resp. complex) Manin triple

#### Theorem 1

Let B be a Manin form and let  $\mathfrak{i}$  be a Lagrangian subalgebra of  $\mathfrak{g}$  for B, i.e. a real (resp. complex) Lie subalgebra of  $\mathfrak{g}$  whose real dimension is equal to the complex dimension of  $\mathfrak{g}$  and which is isotropic for B. Then:

- a) If we denote by  $\mathfrak p$  the normalizer in  $\mathfrak g$  of the nilpotent radical,  $\mathfrak n$ , of  $\mathfrak i$ , then  $\mathfrak p$  is a parabolic subalgebra of  $\mathfrak g$ , with nilpotent radical equals to  $\mathfrak n$ .
- b) Let  $\mathfrak{l}$  be a Levi subalgebra of  $\mathfrak{p}$  (i.e.  $\mathfrak{l}$  is a reductive Lie subalgebra of  $\mathfrak{p}$  with  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ ), and denote by  $\mathfrak{m}$  its derived ideal and  $\mathfrak{a}$  its center, then the intersection,  $\mathfrak{h}$ , of  $\mathfrak{i}$  and  $\mathfrak{m}$  is the fixed point set of an af-involution (resp. f-involution) of  $\mathfrak{m}$ , which is isotropic for B.
- c) The intersection,  $i_{\mathfrak{a}}$ , of  $\mathfrak{a}$  and i, is isotropic for B, and its real dimension equals the complex dimension of  $\mathfrak{a}$ .
- d) One has  $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ .

Reciprocally, any real (resp. complex) Lie subalgebra,  $\mathfrak{i}$ , of  $\mathfrak{g}$ , which is of this form is Lagrangian for B.

Then, one says that i is under  $\mathfrak{p}$ 

One chooses a Cartan subalgebra  $\mathfrak{j}_0$  of  $\mathfrak{g}$ , and a Borel subalgebra of  $\mathfrak{g}$  containing  $\mathfrak{j}_0$ ,  $\mathfrak{b}_0$ . Then, from Theorem 1 and the Bruhat decomposition, one sees (cf. Proposition 1) that every Manin triple is conjugated, under G, to a Manin triple  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  such that  $\mathfrak{i}$  is under  $\mathfrak{p}$  and  $\mathfrak{i}'$  is under  $\mathfrak{p}'$ , with  $\mathfrak{p}$  containing  $\mathfrak{b}_0$  and  $\mathfrak{p}'$  containing the opposite Borel subalgebra to  $\mathfrak{b}_0$ , with respect to  $\mathfrak{j}_0$ . A Manin triple satisfying these conditions will be called **standard**, under  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ .

If  $\mathfrak{r}$  is a real subalgebra of  $\mathfrak{g}$ , we denote by R the analytic subgroup of G with with Lie algebra  $\mathfrak{r}$ .

If  $\mathfrak{e}$  is an abelian real subalgebra of  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{r}$  is an  $\mathfrak{e}$ -invariant subspace of  $\mathfrak{g}$ , let  $\Delta(\mathfrak{r},\mathfrak{e})$  the set of weights of  $\mathfrak{e}$  in  $\mathfrak{r}$ , which is the subset of  $Hom_{\mathbb{R}}(\mathfrak{e},\mathbb{C})$  whose elements are joint eigenvalues of elements in  $\mathfrak{e}$  acting on  $\mathfrak{r}$ . The weight space of  $\alpha$  in  $\Delta(\mathfrak{r},\mathfrak{e})$  is denoted by  $\mathfrak{r}^{\alpha}$ .

Let  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}'$  be given as above, and let B be a Manin form on  $\mathfrak{g}$ .

#### Theorem 2

If there exists a standard Manin triple  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  under  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , then  $\mathfrak{p}$  or  $\mathfrak{p}'$  is

different from  $\mathfrak{g}$ .

#### Theorem 3

Let  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  be a real (resp. complex) standard Manin triple under  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ ). Let  $p^{\mathfrak{n}'}$  be the projection of  $\mathfrak{g}$  on the  $\mathfrak{j}_0$ -invariant supplementary subspace of the nilpotent radical  $\mathfrak{n}'$  of  $\mathfrak{p}'$ , with kernel  $\mathfrak{n}'$ . Let  $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$  the Langlands decomposition of  $\mathfrak{p}$ , such that  $\mathfrak{l}$  contains  $\mathfrak{j}_0$ . Set  $\mathfrak{i}_1 = p^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$ , where  $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$ . One defines similarly  $\mathfrak{i}'_1$ .

Then  $i_1, i'_1$  are contained in  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . Moreover, if  $B_1$  denotes the restriction of B to  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ ,  $(B_1, i_1, i'_1)$  is a real (resp. complex) Manin triple for  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . We set  $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ .

We will use freely the notation of Theorem 1 for  $(B_1, i_1, i'_1)$ , which is called the predecessor of the standard Manin triple (B, i, i').

### Theorem 4

Every real (resp. complex ) Manin triple under  $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')$  is conjugate, by an element of  $P \cap P'$ , to a real (resp. complex) Manin triple under  $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')$ ,  $(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$ , whose all successive predecessors,  $(B,\mathfrak{i}_1,\mathfrak{i}'_1), (B,\mathfrak{i}_2,\mathfrak{i}'_2), \ldots$ , are standard Manin triples in  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{g}_2, \ldots$ , with respect to the intersection of  $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}'_0$ , with  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ , and such that the intersection  $\mathfrak{f}_0$  (resp.  $\mathfrak{f}'_0$ ) of  $\mathfrak{f}_0$  with  $\mathfrak{i}$  (resp.  $\mathfrak{i}'$ ) is a fundamental Cartan subalgebra of  $\mathfrak{i}$  (resp.  $\mathfrak{i}'$ ), contained in  $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots$  (resp.  $\mathfrak{i}'_1, \mathfrak{i}'_2, \ldots$ ).

Such a Manin triple will be called **strongly standard**. The smallest integer, k, such that  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{j}_0$ , is called the height of the strongly standard Manin triple.

Now, we assume that B is  $\mathbb{C}$ -bilinear. One defines :  $\mathbb{C}^+ := \{\lambda \in \mathbb{C}^* | Re\lambda < 0, \text{ or } Re \lambda = 0 \text{ et } Im \lambda > 0\}$ ,  $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^+$ . If B is a complex Manin form on  $\mathfrak{g}$ , one denotes by  $\mathfrak{g}_+$  (resp.  $\mathfrak{g}_-$ ) the sum of the ideals of  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}_i$ , for which the restriction of B to  $\mathfrak{g}_i$  is equal to  $\lambda_i K_{\mathfrak{g}_i}$ , where  $\lambda_i \in \mathbb{C}^+$  (resp.  $\mathbb{C}^-$ ), and  $K_{\mathfrak{g}_i}$  is the Killing form of  $\mathfrak{g}_i$ .

Set  $j_+ = j_0 \cap \mathfrak{g}_+$ ,  $j_- = j_0 \cap \mathfrak{g}_-$ . The restriction from  $j_0$  to  $j_+$  identifies the roots from  $j_0$  in  $\mathfrak{g}_+$  to those from  $j_+$  in  $\mathfrak{g}_+$ . Let us denote by  $\tilde{R}_+$  the set of these roots and by  $\Sigma_+$ , the set of simple roots of the set of positive roots,  $\tilde{R}_+^+$ , of  $\tilde{R}_+$ , whose elements are the non zero weights of  $j^+$  in  $\mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{g}^+$ . One defines similarly  $\tilde{R}_-$ .

One defines also  $\Sigma_-$ , the set of simple roots of the set of positive roots,  $\tilde{R}_-^+$ , of  $\tilde{R}_-$ , whose elements are the non zero weights of  $\mathfrak{j}_-$  in  $\mathfrak{b}_0' \cap \mathfrak{g}^-$ .

For  $\alpha \in \tilde{R} = \tilde{R}_+ \cup \tilde{R}_-$ , let  $H_\alpha \in \mathfrak{j}_0$  be the coroot of  $\alpha$ . Let  $\mathcal{W} = (H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$ , be a Weyl system of generator of  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , where  $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ . More precisely, for all  $\alpha, \beta \in \Sigma$ , one has:

$$[X_{\alpha}, Y_{\beta}] = \delta_{\alpha\beta} H_{\beta}$$
$$[H_{\alpha}, X_{\beta}] = N_{\alpha\beta} X_{\beta}$$
$$[H_{\alpha}, Y_{\beta}] = -N_{\alpha\beta} Y_{\beta}$$

where:

$$N_{\alpha\beta} = \beta(H_{\alpha}) = 2K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\beta})/K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\alpha})$$

# Definition

One calls  $(A, A', i_{\mathfrak{a}}, i_{\mathfrak{a}'})$  generalized Belavin-Drinfeld data with respect to B, if:

1) A is a bijection from a subset  $\Gamma_+$  of  $\Sigma_+$  on a subset  $\Gamma_-$  of  $\Sigma_-$ , such that :

$$B(H_{A\alpha}, H_{A\beta}) = -B(H_{\alpha}, H_{\beta}), \ \alpha, \beta \in \Gamma_{+}$$

2) A' is a bijection from a subset  $\Gamma'_+$  of  $\Sigma_+$  on a subset  $\Gamma'_-$  of  $\Sigma_-$ , such that :

$$B(H_{A'\alpha}, H_{A'\beta}) = -B(H_{\alpha}, H_{\beta}), \ \alpha, \beta \in \Gamma'_{+}$$

3) Let  $C = A^{-1}A'''$  be the map defined on dom  $C = \{\alpha \in \Gamma'_{+} | A'\alpha \in \Gamma_{-}\}$  by  $C\alpha = A^{-1}A'\alpha$ ,  $\alpha \in dom\ C$ . Then C satisfies:

For all  $\alpha \in dom C$ , there exists  $n \in \mathbb{N}^*$  such that  $\alpha, \ldots, C^{n-1}\alpha \in dom C$  and  $C^n\alpha \notin dom C$ .

- 4)  $i_{\mathfrak{a}}$  (resp. $i_{\mathfrak{a}'}$ ) is a complex vector subspace of  $\mathfrak{j}_0$ , i, included and Lagrangian in the orthogonal,  $\mathfrak{a}$  (resp.  $\mathfrak{a}'$ ) for the Killing form of  $\mathfrak{g}$  (or for B), to the suspace generated by  $H_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  (resp.  $\Gamma' := \Gamma'_+ \cup \Gamma'_-$ .
- 5) Let  $\mathfrak{f}$  be the subspace of  $\mathfrak{j}_0$  generated by the family  $H_{\alpha} + H_{A\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_+$ . One defines similarly  $\mathfrak{f}'$ . Then:

$$(\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}})\cap(\mathfrak{f}'\oplus\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})=\{0\}$$

We will denote by  $R_+$  the sub-system of roots of  $\tilde{R}$  whose elements those of  $\tilde{R}$  which are linear combination of elements of  $\Gamma_+$ . One defines similarly  $R_-$ ,  $R'_+$ ,  $R'_-$ . We will denote also by A (resp. A') the  $\mathbb{R}$ -linear extension of A (resp. A'), which defines a bijection from  $R_+$  on  $R_-$  (resp.  $R'_+$  on  $R'_-$ ). If A satisfies the condition 1) above, there exists a unique isomorphism  $\tau$  from the subalgebra  $\mathfrak{m}_+$  of  $\mathfrak{g}$ , generated by  $X_\alpha$ ,  $H_\alpha$ ,  $Y_\alpha$ ,  $\alpha \in \Gamma_+$ , on the subalgebra  $\mathfrak{m}_-$  of  $\mathfrak{g}$ , generated by  $X_\alpha$ ,  $H_\alpha$ ,  $Y_\alpha$ ,  $\alpha \in \Gamma_-$ , such that :

$$\tau(H_{\alpha}) = H_{A\alpha}, \tau(X_{\alpha}) = X_{A\alpha}, \tau(Y_{\alpha}) = Y_{A\alpha}, \alpha \in \Gamma^{+}$$

**Theorem** (cf. Proposition 8 et Théorème 5)

(i) Let  $\mathfrak{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$  be generalized Belavin-Drinfeld data, with respect to B. Let  $\mathfrak{p}$  be the parabolic subalgebra of  $\mathfrak{g}$ , containing  $\mathfrak{b}_0$  and  $\mathfrak{m}$ . Its Langlands decomposition  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ , where  $\mathfrak{l}$  contains  $\mathfrak{j}_0$ , satisfies  $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ . Let  $\mathfrak{i}$  be equal to  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ , where  $\mathfrak{h} := \{X + \tau(X) | X \in \mathfrak{m}_+\}$ . One defines similarly  $\mathfrak{i}'$ .

Then (B, i, i') is a strongly standard Manin triple.

(ii) Every Manin triple is conjugate by an element of G to a unique Manin triple of this type. If the original triple is moreover strongly standard, the element of G can be taken in  $J_0$ , or, in other words, every strongly standard is of the preceeding type, if one allows to change W.

One shows easily that the preceding Theorem implies the classification of certain R-matrix given by Belavin and Drinfeld ([BD], Theorem 6.1).

One proves also results for real Manin triples. One retrieves a result of A. Panov [P1] which classifies certain Lie bialgebras structures on a real simple Lie algebra.

**Aknowledgment**: I thank very much C. Klimcik for suggesting me this work, and for many interesting discussions. I thank J.L. Brylinski for pointing out to me the work of E. Karolinsky. I thank also B. Enriquez and Y. Kosmann-Scwarzbach for telling to me the relations of my earlier work [De] with the work of A. Belavin and G. Drinfeld [BD], and A. Panov [P1].

# 1 Sous-algèbres de Lie Lagrangiennes

Dans tout l'article, algèbre de Lie voudra dire algèbre de Lie de dimension finie

Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie on notera souvent  $\mathfrak{g}^{der}$  son idéal dérivé.

Soit  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie abélienne sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , V un  $\mathfrak{a}$ -module complexe. Pour  $\lambda \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ , on note  $V^{\lambda} := \{v \in V | Xv = \lambda(X)v, \ X \in \mathfrak{a}\}$ , qui est appelé le sous-espace de poids  $\lambda$  de V. On dit que  $\lambda$  est un poids de  $\mathfrak{a}$  dans V si  $V^{\lambda}$  est non nul et on note  $\Delta(V,\mathfrak{a})$  l'ensemble des poids non nuls de  $\mathfrak{a}$  dans V.

Si G est un groupe de Lie, on notera  $G^0$  sa composante neutre.

#### Lemme 1

(i)Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple complexe,  $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$  ses idéaux simples. Toute forme  $\mathbb{R}$  (resp. $\mathbb{C}$ )-bilinéaire  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$  est du type  $B_{\lambda}$  ou  $B_{\lambda}^{\mathfrak{g}}$  (resp.  $K_{\lambda}$  ou  $K_{\lambda}^{\mathfrak{g}}$ ), où  $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  et :

$$B_{\lambda}(X_1 + \ldots + X_n, Y_1 + \ldots + Y_n) = \sum_{i=1,\ldots,n} Im(\lambda_i K_{\mathfrak{g}_i}(X_i, Y_i))$$

$$K_{\lambda}(X_1+\ldots+X_n,Y_1+\ldots+Y_n=\sum_{i=1,\ldots,n}\lambda_iK_{\mathfrak{g}_i}(X_i,Y_i),$$

si les  $X_i, Y_i$  sont des éléments de  $\mathfrak{g}_i$ . Ici  $K_{\mathfrak{g}_i}$  désigne la forme de Killing de  $\mathfrak{g}_i$ .

En particulier, une telle forme est symétrique et les idéaux simples sont deux à deux orthogonaux pour une telle forme.

- (ii) La forme  $B_{\lambda}$  (resp.  $K_{\lambda}$ ) est non dégénérée si et seulement si chacun des  $\lambda_i$  est non nul. La forme  $B_{\lambda}$  est alors de signature  $(\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g})$ .
- (iii) La restriction de  $B^{\mathfrak{g}}_{\lambda}$  à une sous-algèbre complexe et simple,  $\mathfrak{s}$ , de  $\mathfrak{g}$ , est de la forme  $B^{\mathfrak{s}}_{\mu}$ , où  $\mu = \sum_{i=1,\dots,n} q_i \lambda_i$  et pour chaque i,  $q_i$  est un nombre rationnel positif. De plus  $q_i$  est non nul si et seulement si  $\mathfrak{s}$  a un crochet non nul avec  $\mathfrak{g}_i$ .

Démonstration : On traite le cas des formes  $\mathbb{R}$ -bilinéaires, celui des formes  $\mathbb{C}$ -bilinéaires étant semblable. Traitons d'abord le cas où  $\mathfrak{g}$  est simple, auquel cas n=1. La donnée d'une forme  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$ , équivaut à celle d'une application  $\mathbb{R}$ -linéaire entre  $\mathfrak{g}$  et  $Hom_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ , qui commute à l'action de  $\mathfrak{g}$ , regardée comme algèbre de Lie réelle. Mais la partie imaginaire de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  (regardée comme complexe) détermine un isomorphisme de  $\mathfrak{g}$ -modules entre  $\mathfrak{g}$  et  $Hom_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ . Finalement, la donnée de notre forme équivaut à la donnée d'un endomorphisme, T,  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak{g}$ , commutant à l'action de  $\mathfrak{g}$ .

Soit  $\mathfrak{k}$  une forme rélle compacte de  $\mathfrak{g}$ . On écrit :

$$T(X) = Re T(X) + i Im T(X), X \in \mathfrak{k},$$

où  $ReT(X), ImT(X) \in \mathfrak{k}$ . Alors ReT, ImT sont des éléments de  $Hom_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$ . Comme  $\mathfrak{k}$  est simple, il résulte du lemme de Schur que cet espace est égal à  $\mathbb{R} Id_{\mathfrak{k}}$ . Donc, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$T(X) = \lambda X, X \in \mathfrak{k}$$

Maintenant, si  $X, Y \in \mathfrak{k}$ , on a :

$$T(i[X,Y]) = T([iX,Y]) = [iX,TY]$$

la dernière égalité résultant du fait que T commute à l'action de  $\mathfrak{g}$ . Joint à ce qui précède, cela donne :

$$T(i[X,Y]) = \lambda i[X,Y], \ X,Y \in \mathfrak{k}$$

Comme  $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] = \mathfrak{k}$ , on conclut que T est la multiplication par  $\lambda$ . D'où (i) dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est simple.

Supposons maintenant que  $\mathfrak{g}$  soit la somme directe de deux idéaux  $\mathfrak{g}'$ ,  $\mathfrak{g}''$ . Soit B une forme  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$ . On a :

$$B([X',Y'],X'') = -B(Y',[X',X'']) = 0, X', Y' \in \mathfrak{g}', X'' \in \mathfrak{g}'',$$

la dernière égalité résultant du fait que  $\mathfrak{g}'$ ,  $\mathfrak{g}''$  commutent entre eux. Comme  $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ , on a aussi  $[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']=\mathfrak{g}'$ . Finalement  $\mathfrak{g}'$  et  $\mathfrak{g}''$  sont orthogonaux. Alors, on déduit (i) pour  $\mathfrak{g}$  semi-simple du cas où  $\mathfrak{g}$  est simple.

(ii) L'assertion sur la non nullité des  $\lambda_i$  est claire. Pour l'étude de la signature, on se ramène au cas où  $\mathfrak{g}$  est simple. Supposons  $\lambda \in \mathbb{C}$ , non nul. Soit  $\mathfrak{k}$  une forme réelle compacte de  $\mathfrak{g}$ . On fixe une base  $X_1, \ldots, X_l$  de  $\mathfrak{k}$ . On choisit une racine carrée  $\mu$  de  $i\lambda^{-1}$ .On pose  $Y_i = \mu X_i$ ,  $Z_i = i\mu X_i$ . Alors  $B_{\lambda}(Y_i, Z_j) = 0$ ,  $B_{\lambda}(Y_i, Y_j) = \delta_{i,j}$ ,  $B_{\lambda}(Z_i, Z_j) = -\delta_{i,j}$ . D'où l'on déduit l'assertion voulue sur la signature.

(iii) On utilisera le fait suivant :

Si  $\rho$  est une représentation complexe d'une algèbre de Lie simple complexe  $\mathfrak s$  dans un espace de dimension finie V, on a:

$$tr(\rho(X)\rho(Y)) = qK_{\mathfrak{s}}(X,Y)$$

où q est un nombre rationel positif. De plus q est nul si et seulement si  $\rho$  est triviale.

L'existence d'un coefficient de proportionnalité q est claire , car la forme de Killing est, à un scalaire mutiplicatif près, la seule forme  $\mathbb{C}$ -bilinéaire invariante sur  $\mathfrak{s}$ . On se ramène, pour l'étude de q, au cas où  $\rho$  est simple. On considère, sur V, un produit scalaire invariant par une forme réelle compacte,  $\mathfrak{k}$ , de  $\mathfrak{s}$ . Si  $X \in \mathfrak{k}$ ,  $\rho(X)$  est antihermitien et :

$$tr(\rho(X)\rho(X)) = -tr(\rho(X)\rho(X)^*) \le 0$$

cette trace étant nulle seulement si  $\rho(X)$  est nul. On en déduit que q>0 si  $\rho$  est non triviale. Puis on prend un élément non nul d'une sous-algèbre de Cartan j de  $\mathfrak s$ , sur lequel tous les poids entiers de j sont entiers. On en déduit que  $K_{\mathfrak g}(X,X)$  et  $tr(\rho(X)\rho(X))$  sont des entiers, le premier nombre étant non nul car égal à la somme sur toutes les racines,  $\alpha$ , de  $(\alpha(X))^2$ . La rationalité de q en résulte.

### Définition 1

Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie réductive complexe, une forme  $\mathbb{R}(resp.\ \mathbb{C})$ bilinéaire

symétrique sur  $\mathfrak{g}$  et invariante par  $\mathfrak{g}$  est dite forme de Manin si et seulement si elle est de signature  $(\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g})$  (resp. si et seulement si elle est non dégénérée). Une forme de Manin est dite forme spéciale si sa restriction à toute sous-algèbre de Lie complexe semi-simple est non dégénérée.

#### Lemme 2

- (i) Une forme  $\mathbb{R}(resp.\ \mathbb{C})$ -bilinéaire symétrique  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$  est spéciale si et seulement si sa restriction à  $\mathfrak{g}^{der}$  est spéciale et si sa restriction au centre,  $\mathfrak{z}$ , de  $\mathfrak{g}$  est de signature  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z})$  (resp. est non dégénérée).
- (ii) La restriction d'une forme spéciale à une sous-algèbre de Lie semisimple complexe de  $\mathfrak g$  est spéciale.
- (iii) La restriction d'une forme spéciale au centralisateur d'un élément semisimple de  $\mathfrak{g}$ , dont l'image par la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  n'a que des valeurs propres réelles, est spéciale.
- (iv) Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, et  $B = B_{\lambda}^{\mathfrak{g}}$  (resp.  $K = K_{\lambda}^{\mathfrak{g}}$ ), où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  vérifie :

$$Si \sum_{i=1,\dots,n} q_i \lambda_i = 0 \text{ avec } q_i \in \mathbb{Q}^+, \text{ alors les } q_i \text{ sont tous nuls}$$
 (1.1)

alors B (resp. K) est spéciale. On note que (1.1) est satisfait dès que les  $\lambda_i$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , ou bien tous strictement positifs.

(v) Si  $\mathfrak{g}$  est simple, toute forme  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-bilinéaire symétrique  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$  est spéciale.

Démonstration : On traite le cas des formes  $\mathbb{R}$ -bilinéaires, celui des formes  $\mathbb{C}$ -bilinéaires étant semblable. (i) résulte du fait que toute sous-algèbre semisimple de  $\mathfrak{g}$  est contenue dans  $\mathfrak{g}^{der}$  et que, pour toute forme  $\mathbb{R}$ -bilinéaire symétrique  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$ , le centre de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^{der}$  sont orthogonaux. (ii) est clair.

Montrons (iii). Comme le centralisateur d'un élément de q est la somme de son intersection avec  $\mathfrak{g}^{der}$  et de celle avec le centre, on se réduit aisément, grâce à (i) au cas où  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, ce que l'on suppose dans la suite. Soit X un élément semi-simple de  $\mathfrak{g}$  tel que ad X n'a que des valeurs propres réelles, soit  $\mathfrak{l}$  son centralisateur et  $\mathfrak{c}$  le centre de  $\mathfrak{l}$ . D'après (i) et (ii), il suffit de voir que la restriction d'une forme spéciale à  $\mathfrak{c}$  est de signature  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{c}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{c})$ . Soit j une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  contenant X. Alors  $\mathfrak{c}$ est égal à l'intersection des noyaux des racines de j dans  $\mathfrak{g}$  s'annulant sur X. Cela montre que  $\mathfrak{c}$  est la somme de ses intersections avec les idéaux simples de g. Il suffit alors de prouver notre assertion sur la signature dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est simple. Alors  $B=B_{\lambda}$ , avec  $\lambda$  non nul. Soit  $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$  l'espace formé des éléments de j sur lesquels toutes les racines de j dans g sont réelles, qui est une forme réelle de j. Il est clair que  $\mathfrak c$  est la somme directe de  $\mathfrak c_\mathbb R:=\mathfrak c\cap\mathfrak j_\mathbb R$ avec  $i\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ . On fixe une base orthonormée,  $X_1,\ldots,X_l$ , de  $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ , pour la forme de Killing de g. Celle-ci existe car la forme de Killing est définie positive sur  $j_{\mathbb{R}}$ . On choisit une racine carrée  $\mu$  de  $i\lambda^{-1}$ . On pose  $Y_i = \mu X_i$ ,  $Z_i = i\mu X_i$ . Alors  $B_{\lambda}(Y_i, Z_j) = 0$ ,  $B_{\lambda}(Y_i, Y_j) = \delta_{i,j}$ ,  $B_{\lambda}(Z_i, Z_j) = -\delta_{i,j}$ . D'où l'on déduit l'assertion voulue sur la signature, ce qui prouve (iii).

(iv) est une conséquence immédiate du Lemme 1 et (v) est un cas particulier de (iv)  $\hfill\Box$ 

# Corollaire 1 (i)

La restriction d'une forme  $\mathbb{R}$  (resp. $\mathbb{C}$ )-bilinéaire, symétrique,  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$ , et non dégénérée, B, au centralisateur,  $\mathfrak{l}$  d'un élément semi-simple de  $\mathfrak{g}$ , dont l'image par la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  n'a que des valeurs propres réelles, est non dégénérée. Il en va de même de sa restriction à  $\mathfrak{l}^{der}$  et au centre  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{l}$ .

- (ii) Si B est une forme de Manin sur  $\mathfrak{g}$ , sa restriction à  $\mathfrak{l}$  (resp.  $\mathfrak{l}^{der}$ ,  $\mathfrak{a}$ ) est une forme de Manin sur  $\mathfrak{l}$  (resp.  $\mathfrak{l}^{der}$ ,  $\mathfrak{a}$ ).
- (iii) Une forme bilinéaire symétrique,  $\mathfrak{g}$ -invariante est une forme de Manin si et seulement si sa restriction à  $\mathfrak{g}^{der}$  et sa restriction au centre de  $\mathfrak{g}$  sont des formes de Manin.

# Démonstration :

On traite le cas des formes  $\mathbb{R}$ -bilinéaires, celui des formes  $\mathbb{C}$ -bilinéaires étant semblable. Montrons (i). L'algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$  est la somme du centre  $\mathfrak{z}$  de  $\mathfrak{g}$  avec la somme de ses intersections avec les idéaux simples de  $\mathfrak{g}$ . Ces sous-algèbres sont deux à deux orthogonales pour B, d'après le Lemme 1. La restriction de B à  $\mathfrak{z}$  est non dégénérée, car  $\mathfrak{g}^{der}$  et  $\mathfrak{z}$  sont orthogonaux. De plus la restriction de B à l'intersection de  $\mathfrak{l}$  avec un idéal simple de  $\mathfrak{g}$  est non

dégénérée, d'après le Lemme 2 (iii), appliqué à cet idéal simple. D'où l'on déduit que la restriction de B à  $\mathfrak{l}$  est non dégénérée, ce qui implique le même fait pour sa restriction à  $\mathfrak{l}^{der}$  et  $\mathfrak{a}$ .

Si B est de signature  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g})$ , sa restriction à  $\mathfrak{z}$  est de signature  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z})$ . Alors, les assertions sur la signature se démontre comme cidessus, grâce au Lemme 2 (ii), (v), appliqué aux idéaux simples de  $\mathfrak{g}$ . D'où (ii).

La partie si de (iii) est claire. La partie seulement si résulte de (ii)

On rappelle que le radical d'une algèbre de Lie,  $\mathfrak{g}$ , est son plus grand idéal résoluble, et que son radical nilpotent, est le plus grand idéal, dont les éléments sont représentés par des endomorphismes nilpotents dans chaque représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Suivant Bourbaki, on appelle sous-algèbre de Levi d'une algèbre de Lie, toute sous-algèbre semi-simple supplémentaire du radical. Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple complexe on appelle décomposition de Langlands d'une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  une décomposition de la forme  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ , où  $\mathfrak{n}$  est le radical nilpotent et  $\mathfrak{l}$  est une sous-algèbre de Lie complexe de  $\mathfrak{g}$ , réductive dans  $\mathfrak{g}$ .

Rassemblons dans un Lemme quelques propriétés des décompositions de Langlands d'une sous-algèbre parabolique.

**Lemme 3** Soit  $\mathfrak p$  une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak g$ ,  $\mathfrak n$  son radical nilpotent. (i) Si  $\mathfrak j$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak p$ , c'est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak g$ , et il existe une seule décomposition de Langlands de  $\mathfrak p$ ,  $\mathfrak p=\mathfrak l\oplus\mathfrak n$ , telle que  $\mathfrak j$  soit contenue dans  $\mathfrak l$ .

(ii) Si  $\mathfrak{j}$ ,  $\mathfrak{j}'$  sont deux sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , contenues dans  $\mathfrak{p}$ , elles sont conjuguées par un élément de P, qui conjugue les algèbres  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{l}'$  correspondantes.

(iii)  $Si \mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$  est une décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ , toute sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .

#### Démonstration :

Revenant à la définition des sous-algèbres paraboliques (cf. [Bou], Ch. VIII, Paragraphe 3.4, Définition 2, par exemple), on voit qu'il existe une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{j}_1$ , et une décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}$ , avec  $\mathfrak{j}_1$  contenue dans  $\mathfrak{l}_1$ , telle que  $\mathfrak{l}_1$  soit la somme des sous-espaces poids de  $\mathfrak{j}_1$  dans  $\mathfrak{p}$ , qui ne rencontrent pas  $\mathfrak{n}$ . En particulier les poids de  $\mathfrak{j}_1$  dans  $\mathfrak{l}_1 \approx \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$  sont distincts de ceux dans  $\mathfrak{n}$ . Si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}_1' \oplus \mathfrak{n}$  est une décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ , avec  $\mathfrak{j}_1$  contenue dans  $\mathfrak{l}_1'$ ,  $\mathfrak{l}_1'$  est somme des sous-espaces poids de  $\mathfrak{j}_1$  dans  $\mathfrak{l}_1' \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ . D'où l'égalité de  $\mathfrak{l}_1$  et  $\mathfrak{l}_1'$ . Ceci assure l'unicité de  $\mathfrak{l}$  pour  $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1$ . Maintenant toutes les sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{p}$  sont conjuguées à  $\mathfrak{j}_1$ , par un élément de P (cf. [Bour], Chapitre VII, Paragraphe 3.3, Théorème 1). On en déduit (i) par transport de structure, et (ii) résulte de la preuve de (i).

Montrons (iii). Si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$  est une décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ ,

l'action du centre de  $\mathfrak{l}$  sur  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, puisque  $\mathfrak{l}$  est réductive dans  $\mathfrak{g}$ . Cela implique que, si  $\mathfrak{j}$  une une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{l}$ ,  $\mathfrak{j}$  est abélienne et formée d'éléments semi-simples de  $\mathfrak{g}$ . Mais  $\mathfrak{l}$  est isomorphe à  $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ , qui est une algèbre réductive de même rang que  $\mathfrak{g}$ . Pour des raisons de dimension, on voit que  $\mathfrak{j}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .

**Définition 2** On appelle af-involution (resp. f-involution), où a vaut pour antilinéaire et f pour flip, d'une algèbre de Lie semi-simple complexe  $\mathfrak{m}$ , tout automorphisme involutif,  $\mathbb{R}$ -linéaire (resp.  $\mathbb{C}$ -linéaire),  $\sigma$ , de  $\mathfrak{m}$ , pour lequel il existe :

- 1) un idéal  $\tilde{\mathfrak{m}}_0$  de  $\mathfrak{m}$ , qui est en outre est réduit à zéro pour les f-involutions, et une forme réelle,  $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ , de  $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ .
- 2) des idéaux simples de  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}'_j$ ,  $\mathfrak{m}''_j$ ,  $j = 1, \ldots, p$ .
- 3) un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes,  $\tau_j$ , entre  $\mathfrak{m}'_j$  et  $\mathfrak{m}''_j$ ,  $j=1,\ldots,p$ ,

tel que, notant  $\mathfrak{h}_j := \{(X, \tau_j(X)) | X \in \mathfrak{m}'_j\}$ , et notant  $\mathfrak{h}$ , l'ensemble des points fixes de  $\sigma$ , on ait :

$$\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}}_0 \oplus (\oplus_{j=1,\dots,p} (\mathfrak{m}'_j \oplus \mathfrak{m}''_j))$$
$$\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{h}}_0 \oplus (\oplus_{j=1,\dots,p} \mathfrak{h}_j)$$

Il est bon de remarquer qu'un automorphisme involutif de  $\mathfrak{m}$  est caractérisé par son espace de points fixes, car l'espace des éléments anti-invariants est juste l'orthogonal de celui-ci, pour la forme de Killing de  $\mathfrak{m}$  regardée comme réelle.

On remarque qu'une f-involution est en particulier une af-involution. Débutons par quelques propriétés élémentaires.

Lemme 4 Soit h une forme réelle simple d'une algèbre de Lie semi-simple complexe s.

- (i) L'algèbre  $\mathfrak s$  n'est pas simple, si et seulement si  $\mathfrak h$  admet une structure complexe
- (ii) Dans ce cas,  $\mathfrak{s}$  est le produit de deux idéaux simples,  $\mathfrak{s}_1$ ,  $\mathfrak{s}_2$ , isomorphes à  $\mathfrak{h}$ .
- (iii) Toujours dans ce cas, il existe un isomorphisme antilinéaire,  $\tau$ , entre les algèbres de Lie  $\mathfrak{s}_1$ ,  $\mathfrak{s}_2$ , regardées comme réelles, tel que :

$$\mathfrak{h} = \{(X, \tau(X)) | X \in \mathfrak{s}_1\}$$

Démonstration :

Les points (i) et (ii) sont bien connus. Montons (iii). Comme  $\mathfrak{h}$  est une forme réelle de  $\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2$ , la projection de  $\mathfrak{h}$  sur chacun des deux facteurs est non nulle, donc induit un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak{h}$  avec chacun de ces facteurs. Il en résulte que  $\mathfrak{h}$  a la forme indiquée, mais on sait seulement que

 $\tau$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire. Mais alors  $\mathfrak h$  apparaît comme l'ensemble des points fixes de l'automorphisme involutif  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak s$  défini par :

$$(X,Y) \mapsto (\tau^{-1}(Y), \tau(X)), X \in \mathfrak{s}_1, Y \in \mathfrak{s}_2$$

D'après la remarque qui précède le Lemme, cette involution doit être égale à la conjugaison par rapport à  $\mathfrak{h}$ , donc elle est antilinéaire. Ceci implique l'antilinéarité de  $\tau$ .

**Lemme 5** On se donne une af-involution,  $\sigma$ , d'une algèbre de Lie semisimple de  $\mathfrak{m}$ . Les idéaux simples de  $\mathfrak{m}$  sont permutés par  $\sigma$ . On note  $\mathfrak{m}_j$ ,  $j = 1, \ldots, r$ , les idéaux simples de  $\mathfrak{m}$ . On définit une involution  $\theta$  de  $\{1, \ldots, r\}$ caractérisée par :  $\sigma(\mathfrak{m}_j) = \mathfrak{m}_{\theta(j)}$ ,  $j = 1, \ldots, r$ . Pour  $j = 1, \ldots, r$ , l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- 1)  $\theta(j) = j$  et la restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_j$  est un automorphisme antilinéaire de  $\mathfrak{m}_j$ .
- 2)  $\theta(j) \neq j$  et la restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_j$  est un isomorphisme antilinéaire de  $\mathfrak{m}_j$  sur  $\mathfrak{m}_{\theta(j)}$ .
- 3)  $\theta(j) \neq j$  et la restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_j$  est un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\mathfrak{m}_j$  sur  $\mathfrak{m}_{\theta(j)}$ .

Si on est dans le cas 1) ou 2),  $\mathfrak{m}_j$  est contenu dans l'idéal  $\tilde{\mathfrak{m}}_0$  de la définition des af-involutions. En particulier si  $\sigma$  est une f-involution, on est toujours dans le cas 3).

### Démonstration :

En effet, soit  $\mathfrak{h}_{p+l}$ ,  $l=1,\ldots,q$ , les idéaux simples de  $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ . Comme  $\tilde{\mathfrak{h}}_0$  est une forme réelle de  $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ ,  $\tilde{\mathfrak{m}}_0$  est la somme directe des  $\mathfrak{h}_l+i\mathfrak{h}_l$ , qui sont en outre des idéaux. Si  $\mathfrak{h}_{p+l}+i\mathfrak{h}_{p+l}$  est simple, c'est un idéal simple de  $\mathfrak{m}$  et on est dans le cas 1). Sinon  $\mathfrak{h}_l+i\mathfrak{h}_l$  est le produit de deux idéaux simples et l'on est dans le cas 2), d'après le Lemme précédent.

On traite de même le cas où  $\mathfrak{m}_l$  est égal à l'un des  $\mathfrak{m}'_j$ ,  $\mathfrak{m}''_j$ ,  $j=1,\ldots,p$ , en remarquant que  $\mathfrak{h}_j$ 

est l'ensemble des points fixes de l'involution  $\mathbb{C}\text{-lin\'eaire}$  de  $(\mathfrak{m}'_j,\mathfrak{m}''_j)$  donnée par :

$$(X,Y) \mapsto (\tau^{-1}(Y), \tau(X)), X \in \mathfrak{m}'_j, Y \in \mathfrak{m}''_j$$
(1.2)

**Lemme 6** Tout isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire entre deux algèbres de Lie simples complexes est soit  $\mathbb{C}$ -linéaire, soit antilinéaire.

#### Démonstration :

Deux algèbres de Lie semi-simples complexes qui sont isomorphes comme algèbres réelles, sont isomorphes comme algèbres de Lie complexes. En effet, leurs systèmes de racines restreintes sont alors isomorphes. Mais chacun de

ceux-ci est isomorphe au système de racine associé à une sous-algèbre de Cartan . D'où l'assertion. Ceci implique que l'on peut se limiter, pour prouver le Lemme, aux automorphismes  $\mathbb{R}$ -linéaire d'une algèbre de Lie simple complexe,  $\mathfrak{g}$ . Considérant la conjugaison par rapport à une forme réelle de  $\mathfrak{g}$ ,  $X \mapsto \overline{X}$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}' := \{(X, \overline{X}) | X \in \mathfrak{g}\}$  est une forme réelle de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  isomorphe à  $\mathfrak{g}$ . Alors tout automorphisme,  $\sigma$ ,  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak{g}$ , définit, par transport de structure, un automorphisme de  $\mathfrak{g}'$ ,  $\sigma'$ , qui possède un unique prolongement  $\mathbb{C}$ -linéaire à  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ,  $\sigma''$ . Il existe deux automorphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $\mathfrak{g}$ ,  $\tau$  et  $\sigma$ , tels que  $\sigma''$  vérifie :

$$\sigma''(X,Y) = (\tau(X), \theta(Y))$$
 ou bien  $(\tau(Y), \theta(X)), (X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 

Ecrivant la définition de  $\sigma'$ , la stabilité de  $\mathfrak{g}'$ , par  $\sigma''$  implique que  $\sigma$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire dans le premier cas et antilinéaire dans le second.

Corollaire Une involution  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-linéaire d'une algèbre de Lie semisimple complexe est une af-involution (resp. f-involution) si et seulement si sa restriction à tout idéal simple qu'elle laisse invariant est antilinéaire (resp . si elle ne laisse aucun idéal simple invariant)

#### Démonstration :

En effet, d'après le Lemme 5, il suffit de voir que tout automorphisme du produit de deux algèbres de Lie simples complexes  $\mathfrak{s}_1$ ,  $\mathfrak{s}_2$ , permutant les facteurs, est soit  $\mathbb{C}$ -linéaire, soit antilinéaire. Mais un tel automorphisme est de la forme :

$$(X,Y) \mapsto (\tau^{-1}(Y), \tau(X)), X \in \mathfrak{s}_1, Y \in \mathfrak{s}_2,$$

où  $\tau$  est un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire entre  $\mathfrak{s}_1,\,\mathfrak{s}_2$  . On conclut grâce au Lemme précédent.

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'une forme  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-bilinéaire symétrique non dégénérée. Tout sous-espace vectoriel réel (resp. complexe) isotrope est de dimension réelle inférieure ou égale à la dimension complexe de E Un sous-espace vectoriel réel (resp. complexe) de E, muni d'une d'une forme  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-bilinéaire symétrique non dégénérée est dit Lagrangien s'il est isotrope et de dimension réelle égale à la dimension complexe de E. Un tel espace existe si et seulement la forme est de signature  $(dim_{\mathbb{C}}E, dim_{\mathbb{C}}E)$  (resp. si E est de dimension complexe paire).

Comme on l'a indiqué dans l'introduction, le Théorème suivant généralise des résultats d'E. Karolinsky (cf. [K1], Théorème 3 (i) et [K3] Proposition 3.1)

**Théorème 1** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réductive complexe et B une forme de Manin  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-bilinéaire. Soit  $\mathfrak{i}$  une sous-algèbre de Lie réelle (resp. complexe) de  $\mathfrak{g}$ , Lagrangienne pour B.

On a les propriétés suivantes :

- (i) Si l'on note  $\mathfrak p$  le normalisateur dans  $\mathfrak g$  du radical nilpotent,  $\mathfrak n$ , de  $\mathfrak i$ ,  $\mathfrak p$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak g$ , contenant  $\mathfrak i$ , de radical nilpotent  $\mathfrak n$ .
- (ii) Soit  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$  une décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{a}$  le centre de  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{m}$

son idéal dérivé. On note  $\mathfrak h$  l'intersection de  $\mathfrak i$  et  $\mathfrak m$ . Elle est isotrope pour B. De plus  $\mathfrak h$  est l'espace des points fixes d'une af-involution (resp. f-involution),  $\sigma$ , de  $\mathfrak m$ .

Si B est réelle et spéciale, celle-ci est antilinéaire et  $\mathfrak{h}$  est une forme réelle  $de \mathfrak{m}$ .

- (iii) L'intersection  $i_{\mathfrak{a}}$  de  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{i}$  est Lagrangienne pour la restriction de B à  $\mathfrak{a}$ .
- (iv) On  $a \mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ .

Réciproquement si une sous-algèbre de Lie réelle,  $\mathfrak{i}$ , de  $\mathfrak{g}$  est de la forme ci-dessus, elle est Lagrangienne pour B. On dit alors que  $\mathfrak{i}$  est sous  $\mathfrak{p}$ .

Début de la démonstration du Théorème 1 : Soit i une sous-algèbre de Lie réelle (resp. complexe) de  $\mathfrak g$  Lagrangienne pour B. On note  $\mathfrak r$  son radical et on pose :

$$\mathfrak{n} := \{ X \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}^{der} | ad_{\mathfrak{g}}(X) \ est \ nilpotent \}$$
 (1.3)

Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Levi de  $\mathfrak{i}$ .

Lemme 7 L'ensemble  $\mathfrak n$  est un idéal de  $\mathfrak i$  et  $[\mathfrak i,\mathfrak r]$  est contenu dans  $\mathfrak n$ .

Démonstration : Montrons que  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $\mathfrak{r}$  contenant  $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$ . En effet, comme  $\mathfrak{r}$  est résoluble, dans une base, sur  $\mathbb{C}$ , bien choisie de  $\mathfrak{g}$ , les  $ad_{\mathfrak{g}}(X)$ ,  $X \in \mathfrak{r}$  s'écrivent sous forme de matrices triangulaires supérieures. Pour  $X \in \mathfrak{r}$ , les entrées de la diagonale de cette matrice sont notées  $\lambda_1(X), \ldots, \lambda_p(X)$ , où les  $\lambda_i$  sont des caractères de  $\mathfrak{r}$ . Alors  $\mathfrak{n}$  est l'intersection des noyaux de ces caractères avec  $\mathfrak{g}^{der}$ . Donc  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $\mathfrak{r}$  contenant  $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$ . Si  $\mathfrak{f}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{r}$  est encore une algèbre de Lie résoluble car  $[\mathfrak{f},\mathfrak{f}]=\{0\}$  et  $[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]\subset\mathfrak{r}$ . Un argument similaire à celui ci-dessus montre que  $[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]$  est contenu dans  $\mathfrak{n}$ . La réunion de toutes les sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{h}$  est dense dans  $\mathfrak{h}$ , d'après la densité des éléments réguliers (cf.[Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.2 et Paragraphe 2.3, Théorème 1). Par continuité et densité, on en déduit que  $[\mathfrak{h},\mathfrak{r}]\subset\mathfrak{n}$ .

**Lemme 8** Soit k un entier compris entre 0 et la dimension réelle (resp. complexe) de  $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ . Il existe un sous-espace réel (resp. complexe), abélien,  $\mathfrak{a}_k$ , de  $\mathfrak{r}$ , de dimension k, tel que :

- (i)  $\mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{n} = \{0\}.$
- (ii)  $\mathfrak{a}_k$  est formé d'éléments semi-simples de  $\mathfrak{g}$ .
- (iii)  $\mathfrak{a}_k$  et  $\mathfrak{h}$  commutent.

 $D\acute{e}monstration$ : On procède par récurrence sur k. Si k=0, le Lemme est clair. Supposons le démontré pour  $k < dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{r}/\mathfrak{n})$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , resp.  $\mathbb{C}$ ) et montrons le au rang k+1. Alors  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$  est une algèbre de Lie réductive dans  $\mathfrak{g}$ , regardée comme réelle (resp. complexe). D'autre part, comme  $\mathfrak{n}$ 

contient  $[\mathfrak{i},\mathfrak{r}]$  d'après le Lemme précédent, on voit que  $\mathfrak{i}$  et donc  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$  agit trivialement sur  $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ . Ceci implique que :

$$[\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\oplus\mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}$$

Donc,  $\mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n}$  est un  $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k)$ -sous-module de  $\mathfrak{r}$ , qui admet un supplémentaire dans  $\mathfrak{r}$  commutant à  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ , puisque  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$  est réductive dans  $\mathfrak{g}$  et que le quotient  $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n}$  est un  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ -module trivial.

On choisit un élément non nul de ce supplémentaire, X. Alors :

$$X \in \mathfrak{r}, \ X \notin \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k, \ et \ [X, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\}$$
 (1.4)

On écrit  $X = X_s + X_n$ , où  $X_n$  est un élément de  $\mathfrak{g}^{der}$ ,  $X_s$  est un élément de  $\mathfrak{g}$  commutant à  $X_n$  tels que  $ad_{\mathfrak{g}}X_s$  est semi-simple et  $ad_{\mathfrak{g}}X_n$  est nilpotent. On sait qu'alors  $ad_{\mathfrak{g}}X_s$ ,  $ad_{\mathfrak{g}}X_n$  sont des polynômes en  $ad_{\mathfrak{g}}X$ . Joint à (1.2), cela implique :

$$[X_s, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\}, \ [X_n, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\}$$
 (1.5)

Montrons que  $X_n$  appartient à i. Soit j une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{h}$ . Alors  $\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$  est résoluble. On peut donc choisir une base de  $\mathfrak{g}$  dans laquelle les  $ad_{\mathfrak{g}}Y$ ,  $Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$ , sont représentés par des matrices triangulaires supérieures. On peut choisir cette base de sorte qu'elle soit la réunion de bases des idéaux simples de  $\mathfrak{g}$  avec une base du centre de  $\mathfrak{g}$ , ce que l'on fait dans la suite. Comme  $ad_{\mathfrak{g}}X_n$  est un polynôme en  $ad_{\mathfrak{g}}X$ , et que  $X \in \mathfrak{r}$ , il est représenté dans cette base par une matrice triangulaire supérieure. Comme cet endomorphisme est nilpotent, sa diagonale est nulle. On en déduit que, pour tout  $Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$ , les composantes de  $X_n$  et Y dans les idéaux simples de  $\mathfrak{g}$  sont deux à deux orthogonales pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Alors, il résulte de l'orthogonalité, pour B, du centre de  $\mathfrak{g}$  à  $\mathfrak{g}^{der}$  et du Lemme 1 (i), que :

$$B(X_n, Y) = 0, Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$$

En utilisant la densité dans  $\mathfrak{h}$  de la réunion de ses sous-algèbres de Cartan, on en déduit que  $X_n$  est orthogonal à  $\mathfrak{i}$  pour B. Mais  $\mathfrak{i}$  est un sous-espace isotrope pour B de dimension maximale. Donc  $X_n$  est élément de  $\mathfrak{i}$  comme désiré.

Ecrivons  $X_n = H + R$  avec  $H \in \mathfrak{h}$ ,  $R \in \mathfrak{r}$ . Comme  $X_n$  commute à  $\mathfrak{h}$ , d'après (1.3) et que  $[\mathfrak{h},\mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$ , on voit que H commute à  $\mathfrak{h}$ . Donc H est nul puisque  $\mathfrak{h}$  est semi-simple. Finalement  $X_n \in \mathfrak{r}$ , et en fait  $X_n \in \mathfrak{n}$ , d'après la définition de  $\mathfrak{n}$ . Comme X appartient à un supplémentaire de  $\mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{r}$  et que  $X = X_s + X_n$ , on a :

$$X_s \in \mathfrak{r}, X_s \notin \mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}$$

On pose  $\mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_k + \mathbb{K}X_s$ . D'après (1.3) et la semi-simplicité de  $ad_{\mathfrak{g}}X_s$ ,  $\mathfrak{a}_{k+1}$  vérifie les propriétés voulues.

Suite de la démonstration du Théorème 1:

On pose  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a}_p$ , avec  $p = dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ , de sorte que  $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ , où  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  est formé d'éléments semi-simples de  $\mathfrak{g}$  avec :

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}] = \{0\}, \ \mathfrak{r} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$$

Comme  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$  est résoluble, il existe une sous-algèbre de Borel,  $\mathfrak{b}$ , de  $\mathfrak{g}$ , contenant  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ . A noter que  $\mathfrak{n}$  est contenue dans le radical nilpotent,  $\mathfrak{v}$ , de  $\mathfrak{b}$ , d'après la définitionde  $\mathfrak{n}$  et les propriétés du radical nilpotent d'une sous-algèbre de Borel. Montrons que  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  est contenue dans une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , contenue dans  $\mathfrak{b}$ . En effet, d'après [Bor], Proposition 11.15, la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  contenant  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ , elle contient une sous-algèbre de Borel du centralisateur  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Celle-ci contient une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{l}$ . Celle-ci est aussi une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  (cf. [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.3, Proposition 10).

Soit  $\mathfrak u$  la somme des sous espaces poids de  $\mathfrak i_{\mathfrak a}$ , dans  $\mathfrak v$ , , pour des poids non nuls. Alors  $\mathfrak p:=\mathfrak l\oplus\mathfrak u$  est une sous algèbre parabolique de  $\mathfrak g$ , contenant  $\mathfrak b$ . Comme  $\mathfrak l$  est réductive,  $\mathfrak m:=\mathfrak l^{der}$  est semi-simple et le radical de  $\mathfrak p$  est égal à la somme du centre  $\mathfrak a$  de  $\mathfrak l$  avec  $\mathfrak u$ . La définition de  $\mathfrak u$  montre que  $[\mathfrak p,\mathfrak p]=\mathfrak m\oplus\mathfrak u$ , donc le radical nilpotent de  $\mathfrak p$  est égal à  $\mathfrak u$  (cf. [Bou], Ch. I, Paragraphe 5.3, Théorème 1). Comme  $\mathfrak i=\mathfrak h\oplus\mathfrak i_{\mathfrak a}\oplus\mathfrak n$ , que  $\mathfrak i_{\mathfrak a}\oplus\mathfrak n$  est contenu dans  $\mathfrak b$  et que  $\mathfrak h$  est contenu dans  $\mathfrak l$ , on a :

$$\mathfrak{i}\subset\mathfrak{p}$$

Or  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\mathfrak{u}$ ) est la somme de ses intersections  $\mathfrak{p}_i$  (resp.  $\mathfrak{u}_i$ ) avec les idéaux simples  $\mathfrak{g}_i$  de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\mathfrak{p}_i$  est orthogonal à  $\mathfrak{u}_i$  pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}_i$ , on en déduit que  $\mathfrak{u}$  est orthogonal à  $\mathfrak{p}$  pour B (cf. Lemme 1 (i)). Comme i est un sous-espace isotrope pour B, de dimension maximale et contenu dans  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{u}$  est inclus dans i. Il résulte alors de la définition de  $\mathfrak{n}$ , que  $\mathfrak{u}$  est contenu dans  $\mathfrak{n}$ . Par suite, on a :

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}), \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l})$$
 (1.6)

Remarquons que  $\mathfrak{a}$  contient  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ . On a  $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{m})$ . Comme  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{v}$  et  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{n}$ , on en déduit que  $\mathfrak{n} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m})$ . On déduit alors de (1.6) que :  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}$ . Finalement, on a :

$$\mathfrak{i}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}\oplus(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{m})\oplus\mathfrak{u}$$

Alors, posant:

$$i' := i \cap \mathfrak{m},$$

on a:

$$\mathfrak{i}'=\mathfrak{h}\oplus(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{m})$$

C' est une sous-algèbre isotrope de  $\mathfrak m$  pour la restriction de B à  $\mathfrak m$ , donc, d'après le Corollaire du Lemme 2 (ii), de dimension réelle inférieure ou égale à la dimension complexe de  $\mathfrak m$ .

De même,  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  est un sous espace isotrope de  $\mathfrak{a}$  pour la restriction de B à  $\mathfrak{a}$ . D'après le Corollaire du Lemme 2, la restriction de B à  $\mathfrak{a}$  est de signature  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a})$  (resp. est non dégénérée). Il en résulte que la dimension

réelle de  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  est inférieure ou égale à  $dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}$ . Mais  $dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{m} + dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a} + dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ , on déduit de ce qui précède que l'on a :

$$dim_{\mathbb{R}}i' = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{m}, \ dim_{\mathbb{R}}i_{\mathfrak{a}} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}$$
 (1.7)

**Lemme 9** L'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}' := \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}$  est réduite à zéro et  $\mathfrak{h}$  a la forme indiquée dans le Théorème.

Démonstration : Si  $\mathfrak{f}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{f}+\mathfrak{n}'+\mathfrak{i}\mathfrak{n}'$  est une sous-algèbre de Lie réelle et résoluble de  $\mathfrak{m}$ . On peut donc choisir une base de  $\mathfrak{m}$ , réunion de bases des idéaux simples de  $\mathfrak{m}$ , telle que, pour tout  $X \in \mathfrak{f}+\mathfrak{n}'+\mathfrak{i}\mathfrak{n}'$ ,  $ad_{\mathfrak{m}}X$  soit représenté, dans cette base, par une matrice triangulaire supérieure. De plus, si X est élément de  $\mathfrak{n}'+\mathfrak{i}\mathfrak{n}'$ , les éléments diagonaux de cette matrice sont nulles. On voit, grâce au Lemme 1 (i), que  $\mathfrak{n}'+i\mathfrak{n}'$  est orthogonal à  $\mathfrak{f}+\mathfrak{n}'$ , pour la restriction, B', de B à  $\mathfrak{m}$ . Ceci étant vrai pour tout  $\mathfrak{f}$ ,  $\mathfrak{n}'+i\mathfrak{n}'$  est orthogonal à  $\mathfrak{i}'$  (=  $\mathfrak{h}+\mathfrak{n}'$ ), pour B'. Mais B' est non dégénérée, d'après le Corollaire du Lemme 2, donc, d'après le Lemme 1 (ii) et (1.7),  $\mathfrak{i}'$  est un sous-espace isotrope de  $\mathfrak{m}$ , pour B', de dimension maximale. Il en résulte que  $\mathfrak{n}'+i\mathfrak{n}'$  est contenu dans  $\mathfrak{i}'$ . Mais  $\mathfrak{n}'+i\mathfrak{n}'$  est aussi contenu dans  $\mathfrak{v}\subset\mathfrak{g}^{der}$ . Finalement  $\mathfrak{n}'+i\mathfrak{n}'$  est contenudans l'intersection de  $\mathfrak{i}'$  avec  $\mathfrak{n}$ , d'après la définition de celui-ci. Mais, comme  $\mathfrak{i}'$  est contenu dans  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{i}'\cap\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$ . Alors on a :  $\mathfrak{n}'+i\mathfrak{n}'\subset\mathfrak{n}'$ , c'est à dire que  $\mathfrak{n}'$  est un sous-espace vectoriel complexe de  $\mathfrak{g}$ , ce qui bien sur évident dans le cas complexe.

Soit  $\mathfrak{h}_j$ ,  $j=1,\ldots,r$ , les idéaux simples de  $\mathfrak{h}$ . Comme  $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j$  est un idéal de l'algèbre de Lie simple réelle  $\mathfrak{h}_j$ , il y a deux possiblités pour  $\mathfrak{h}_j$ . Ou bien  $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \{0\}$ , et alors  $\mathfrak{h}_j + i\mathfrak{h}_j$  est une algèbre de Lie semi-simple complexe dont  $\mathfrak{h}_j$  est une forme réelle. Ou bien  $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_j$  et  $\mathfrak{h}_j$  est une sous-algèbre simple complexe de  $\mathfrak{g}$ . On remarquera que cette deuxième possibilité est exclue, si B est spéciale, puique  $\mathfrak{h}_j$  serait alors semi-simple complexe et isotrope pour B.

On suppose que, pour  $j=1,\ldots,p,$   $\mathfrak{h}_j\cap i\mathfrak{h}_j=\{0\}$ , et que pour  $j=p+1,\ldots,r,$   $\mathfrak{h}_j\cap i\mathfrak{h}_j=\mathfrak{h}_j.$  Si  $j=1,\ldots,p,$  on note  $\mathfrak{k}_j=\mathfrak{h}_j\oplus i\mathfrak{h}_j.$  Dans le cas complexe, i.e. si B est  $\mathbb{C}$ -bilinéaire,  $\mathfrak{h}_j$  est toujours complexe et p=0. Si  $j=p+1,\ldots,r,$  on note  $\mathfrak{k}_j$  la somme des projections de  $\mathfrak{h}_j$  dans les idéaux simples de  $\mathfrak{m}.$  On note aussi  $\mathfrak{k}'_j=\mathfrak{h}_j+i\mathfrak{h}_j,$  pour  $j=1,\ldots,r.$  On note  $\mathfrak{k}=\sum_{j=1,\ldots,r}\mathfrak{k}_j$  et  $\mathfrak{k}'=\sum_{j=1,\ldots,r}\mathfrak{k}'_j=\mathfrak{h}+i\mathfrak{h}$ , qui est contenu dans  $\mathfrak{k}.$  Par ailleurs, deux éléments, X et Y, de  $\mathfrak{m}$  commutent si et seulement X et iY commutent (resp. X commute à chacune des projections de Y dans les idéaux simples de  $\mathfrak{m}$ ). Il en résulte que, pour  $j\neq l$ ,  $\mathfrak{k}_j$  commute à  $\mathfrak{h}_l$ , donc  $\mathfrak{k}_j\cap(\sum_{l\neq j}\mathfrak{k}_l)$  est contenu dans le centre de  $\mathfrak{k}_j$ , qui est semi-simple complexe. Il en résulte que :

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{j=1,\dots,r} \mathfrak{k}_j, \quad \mathfrak{k}' = \bigoplus_{j=1,\dots,r} \mathfrak{k}'_j \tag{1.8}$$

Alors  $\mathfrak{k},\,\mathfrak{k}'$  sont des sous-algèbres de Lie semi-simples complexes de  $\mathfrak{m}.$  Montrons que :

$$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}' = \{0\} \tag{1.9}$$

En effet  $\mathfrak{n}'$  est un idéal dans  $\mathfrak{i}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}'$ , puisque  $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}'$  est l'intersection de l'idéal  $\mathfrak{n}$  de i avec  $\mathfrak{m}$ . C'est donc un  $\mathfrak{h}$ -module, et aussi un  $\mathfrak{k}'$ -module puisque  $\mathfrak{n}'$  est un espace vectoriel complexe. Donc  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$  est un sous- $\mathfrak{k}'$ -module, et aussi une sous-algèbre résoluble de  $\mathfrak{k}$ . Il est clair que les  $\mathfrak{k}_i$  sont des sous- $\mathfrak{k}'$ -modules de  $\mathfrak{k}$ , qui n'ont aucun sous-quotient simple en commun. En effet, d'une part  $\mathfrak{t}'_l$  agit trivialement sur  $\mathfrak{t}_i$ , si  $j \neq l$ . D'autre part, d'après les définitions, on voit que les sous-quotients simples du  $\mathfrak{t}'_i$ -module  $\mathfrak{t}_i$  sont isomorphes à des sous-quotients de  $\mathfrak{k}'_i$ , dont aucun n'est trivial, puique  $\mathfrak{k}'_i$  est une algèbre de Lie semi-simple. Donc, si  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$  est non nul, il a une intersection non nulle,  $\mathfrak{k}''$ , avec l'un des  $\mathfrak{t}_j$ , qui est un  $\mathfrak{t}'_j$ -sous-module. Comme  $\mathfrak{t}_j$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{m}$ , il en va de même de  $\mathfrak{k}''$ , qui est de plus résoluble, puisque c'est le cas de

 $\mathfrak{n}'$ .

Si  $j=1,\ldots,p,\,\mathfrak{k}_j=\mathfrak{k}_j'$  et un  $\mathfrak{k}_j'$ -sous-module de  $\mathfrak{k}_j$  est isomorphe un idéal de  $\mathfrak{k}_{i}$ . Alors  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$  est à la fois semi-simple et résoluble. Une contradiction qui montre (1.9) dans ce cas.

Si  $j = p + 1, \ldots, r$ ,  $\mathfrak{t}'_j = \mathfrak{h}_j$  est simple, donc l'une des projections de  $\mathfrak{t}''$  sur un idéal simple de  $\mathfrak{m}$  est isomorphe à  $\mathfrak{h}_i$ . Cette projection étant un morphisme d'algèbres de Lie, il en résulte que l'algèbre de Lie résoluble f'', admet un quotient semi-simple. Une contradiction qui achève de prouver (1.9).

Pour  $j = p + 1, \dots, r, \, \mathfrak{h}_i$  ne peut être contenu dans un idéal simple de En effet, d'après le Corollaire du Lemme 2, la restriction de B à  $\mathfrak{m}$ est une forme de Manin. D'après le Lemme 1 (ii) et le Lemme 2 (v), la restriction de B à un idéal simple de  $\mathfrak{m}$  est spéciale, et notre assertion en résulte, car pour  $j = p + 1, \dots, r, \, \mathfrak{h}_i$  est isotrope et semi-simple complexe. Pour j = p + 1, ..., r, on notera  $n_j$ , le nombre d'idéaux simples de  $\mathfrak{m}$  dans lesquels  $\mathfrak{h}_j$  a une projection non nulle, et pour  $j=1,\ldots,p$ , on pose  $n_j=1$ . On vient de voir que :

$$n_j \ge 2, \ j = p + 1, \dots, r$$
 (1.10)

Montrons que  $\mathfrak{n}' = \{0\}.$ 

On a évidemment :

$$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{i}' = (\sum_{j=1,\dots,r} dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_j) + dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{n}'$$

Alors, en posant  $p_j = 1$ , pour  $j = 1, \ldots, p$  et  $p_j = 2$ , pour  $j = p + 1, \ldots, r$ , on a:

$$dim_{\mathbb{R}} \mathbf{i}' = \left(\sum_{j=1,\dots,r} p_j dim_{\mathbb{C}} \mathbf{f}'_j\right) + dim_{\mathbb{R}} \mathbf{n}' \tag{1.11}$$

Soit  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{k}$ ,  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}}$  une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{k}$ , contenant  $j_{\ell}$ , de radical nilpotent  $\mathfrak{n}_{\ell}$ . Alors  $\mathfrak{b}_{\ell} \oplus \mathfrak{n}'$  est une algèbre de Lie résoluble, contenue dans m, donc contenue dans une sous-algèbre de Borel,  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ , de  $\mathfrak{m}$ . Alors  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}}$  est contenue dans une sous algèbre de Cartan,  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{m}}$ , contenue dans  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$  (voir avant (1.6)). De plus  $\mathfrak{n}_k$  est contenu dans le radical nilpotent

de  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ ,  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$ , qui vérifie :

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}} = \{ X \in \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}} | ad_{\mathfrak{m}}X \ est \ nilpotent \}$$

En effet, les éléments de  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{k}}$  sont représentés, dans toute représentation de dimension finie de  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{k}}$ , et donc de  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ , par des opérateurs nilpotents.

De même,  $\mathfrak{n}'$  est contenudans  $\mathfrak{m}$ , car pour tout  $X \in \mathfrak{n}'$ ,  $ad_{\mathfrak{g}}X$ , et donc  $ad_{\mathfrak{m}}X$  est nilpotent.

On note j'' (resp.  $\mathfrak{n}''$ ) un supplémentaire de  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}}$  dans  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{m}}$ , resp.  $\mathfrak{n}_k \oplus \mathfrak{n}'$  dans  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$ . Un calcul immédiat montre :

$$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{m} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{k} + 2dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n}' + dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{j}'' + 2dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n}''$$
(1.12)

En posant  $n_i = 1$  pour j = 1, ..., p, on a immédiatement :

$$dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{k}) = \sum_{j=1,\dots,r} n_j dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{k}'_j \tag{1.13}$$

Alors (1.11), joint à la première égalité de (1.7), et à (1.12), (1.13), implique :

$$2dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n}'+\sum_{j=1,\dots,r}p_{j}dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{k}'_{j}=2dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n}'+dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{j}''+2dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n}''+\sum_{j=1,\dots,r}n_{j}dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{k}'_{j}$$

Comme  $n_j$  est supérieur ou égal à  $p_j$ , d'après (1.10) et la définition des  $n_j$ ,  $p_j$ , on en déduit :

$$p_j = n_j, j = 1, \dots, r, \text{ et } \mathfrak{n}'' = \mathfrak{j}'' = \{0\}$$

Alors  $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}'$  contient la sous-algèbre de Borel,  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ , de  $\mathfrak{m}$ . C'est une sous-algèbre parabolique dont le radical est égal à  $\mathfrak{n}'$ , donc est nilpotent. Elle est donc égale à  $\mathfrak{m}$  et son radical nilpotent  $\mathfrak{n}'$  est réduit à zéro, comme désiré. En outre  $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}$ , donc les  $\mathfrak{k}_j$  sont des idéaux de  $\mathfrak{m}$ . On pose  $\tilde{\mathfrak{m}}_0 = \bigoplus_{j=1,\ldots,p} \mathfrak{k}_j$ ,  $\tilde{\mathfrak{h}}_0 = \bigoplus_{j=1,\ldots,p} \mathfrak{h}_j$ . On pose q = r - p. Pour  $l = 1,\ldots,q$ ,  $\mathfrak{k}_{p+l}$  est somme de deux idéaux simples,  $\mathfrak{m}'_l$ ,  $\mathfrak{m}''_l$ , car  $n_{p+l} = 2$ . La projection de  $\mathfrak{h}_{l+p}$  sur chacun de ces idéaux est bijective, sa surjectivité résultant de la définition de  $\mathfrak{k}_l$ , son injectivité résultant de la simplicité de  $\mathfrak{h}_{l+p}$  et de la non nullité de ce morphisme d'algèbres de Lie. Donc  $\mathfrak{h}_{p+l} := \{(X, \tau_l(X)) | X \in \mathfrak{m}'_l\}$ , où  $\tau_l$  est un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{m}'_l$  sur  $\mathfrak{m}''_l$ . Donc  $\mathfrak{h}$  a la forme voulue

# Lemme 10 Aucun poids non nul de a dans g n'est nul sur i<sub>a</sub>.

 $D\acute{e}monstration$ : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un poids non nul  $\alpha$  de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{g}$ , nul sur  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ . Soit  $H_{\alpha} \in \mathfrak{a}$  tel que :

$$K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, X) = \alpha(X), \ X \in \mathfrak{a}$$
 (1.14)

Alors  $H_{\alpha}$  appartient à l'un des idéaux simples de  $\mathfrak{g}$ . En effet, soit j une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , contenant  $\mathfrak{a}$ . Alors  $\alpha$  est la restriction à  $\mathfrak{a}$  d'une racine  $\beta$  de j dans  $\mathfrak{g}$  et l'on a :

$$K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\alpha}) > 0 \tag{1.15}$$

Soit  $H_{\beta} \in \mathfrak{j}$  tel que :

$$K_{\mathfrak{g}}(H_{\beta},X) = \beta(X), \ X \in \mathfrak{j}$$

Alors j (resp.  $\mathfrak a$ ) est la somme directe de ses intersections avec les idéaux simples de  $\mathfrak g$ , et  $H_\beta$  (resp.  $H_\alpha$ ) appartient à l'une de celles-ci. On déduit alors du Lemme 1 (i), qu' il existe  $\mu \in \mathbb C$ , non nul car B est non dégénérée, tel que :

$$B(\lambda H_{\alpha}, X) = Im(K_{\mathfrak{g}}(\lambda \mu H_{\alpha}, X)), \ \lambda \in \mathbb{C} \ X \in \mathfrak{g}$$
 (1.16)

Comme  $\alpha$  est nulle sur  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ , il résulte de (1.14) et (1.16) que  $\mathbb{C}H_{\alpha}$  est orthogonale à  $\mathfrak{i}_a$ , pour B. Comme B est une forme de Manin, la restriction de B à  $\mathfrak{a}$  est de signature  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a})$ . Tenant compte de (1.7), on voit que  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  est un sous-espace de  $\mathfrak{a}$ , isotrope pour B, de dimension maximale. Alors, ce qui précède montre que  $\mathbb{C}H_{\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ . Par ailleurs, si  $\lambda$  est une racine carrée de  $i\mu^{-1}$ ,  $B(\mu H_{\alpha}, \mu H_{\alpha})$  est non nul d'après (1.15) et (1.16). Une contradiction avec le fait que  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  est isotrope qui achève de prouver le Lemme.

Fin de la démonstration du Théorème 1: Montrons la propriété suivante :

Toute sous – algèbre parabolique  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$  est égale au normalisateur dans  $\mathfrak{g}$  de son radical nilpotent  $\mathfrak{w}$  (1.17)

D'abord  $\mathfrak{q}$  normalise  $\mathfrak{w}$ . Donc, le normalisateur  $\mathfrak{r}$  de  $\mathfrak{w}$  dans  $\mathfrak{g}$  contient  $\mathfrak{q}$ . C'est donc une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , qui contient  $\mathfrak{w}$  comme idéal. Compte tenu de [Bou], Ch. I, Paragraphe 5.3, Remarque 2,  $\mathfrak{w}$  est contenu dans le radical nilpotent,  $\mathfrak{x}$ , de  $\mathfrak{r}$ . On a alors :  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{r}$ ,  $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{x}$ , d'où l'on déduit facilement que  $\mathfrak{x} = \mathfrak{w}$  et  $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}$ , comme désiré. Donc  $\mathfrak{q}$  est bien le normalisateur de  $\mathfrak{n}$ . Ceci achève de prouver (1.17).

Montrons que  $\mathfrak n$  est le radical nilpotent de  $\mathfrak i$ . En effet, comme  $\mathfrak n$  est somme de sous-espaces poids sous  $\mathfrak a$  et qu'aucun de ces poids n'est nul sur  $\mathfrak i_{\mathfrak a}$ , d'après le Lemme précédent, on a :

$$[\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}},\mathfrak{n}]=\mathfrak{n}$$

Donc  $[\mathfrak{i},\mathfrak{i}]=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$  et l'intersection de  $[\mathfrak{i},\mathfrak{i}]$  avec le radical  $\mathfrak{r}=\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}+\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{i}$  est égal à  $\mathfrak{n}$ . Donc, d'après [Bou] Ch. I, Paragraphe 5.3, Théorème 1,  $\mathfrak{n}$  est bien le radical nilpotent de  $\mathfrak{i}$ . On a donc montré que  $\mathfrak{i}$  s'écrit de la manière voulue, pour une décomposition de Langlands particulière du normalisateur,  $\mathfrak{p}$ , de  $\mathfrak{n}$ . Si  $\mathfrak{p}=\mathfrak{l}'\oplus\mathfrak{n}$  est une autre décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{l}'$  sont isomorphes, puisqu'elles sont toutes les deux isomorphes à  $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ . Comme  $\mathfrak{i}$  contient  $\mathfrak{n}$ , les intersections de  $\mathfrak{i}$  avec  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{l}'$  se correspondent dans

cet isomorphisme, et la décomposition de  $\mathfrak{i}$  qu'on en déduit, relativement à cette nouvelle décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ , a les propriétés voulues. Etudions la partie réciproque du Théorème. Une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  est la somme de ses intersections avec les idéaux simples de  $\mathfrak{g}$ . En outre, elle est orthogonale à son radical nilpotent, pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . On conclut que si  $\mathfrak{i}$  a une décomposition comme dans l'énoncé, elle est isotrope pour B, et de dimension réelle égale à la dimension complexe de  $\mathfrak{g}$ .

Définition 3 On rappelle qu'une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle est une sous-algèbre de Cartan fondamentale si et seulement si elle contient des éléments réguliers dont l'image par la représentation adjointe n'a que des valeurs propres imaginaires pures. Cela équivaut au fait qu'aucune racine de cette sous-algèbre de Cartan n'est réelle. Une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie réelle est dite fondamentale si sa projection dans une sous-algèbre de Levi, parallèlement au radical, est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de cette algèbre de Lie semi-simple

Comme toutes les sous-algèbres de Cartan fondamentales d'une algèbre de Lie réelle semi-simple sont conjuguées entre elles par des automorphismes intérieurs, il en va de même pour les sous-algèbres de Cartan fondamentales d'une algèbre de Lie réelle. En effet il suffit d'adapter la preuve du fait que (ii) implique (i), dans [Bou], Ch. VII, Paragraphe 3.5, Proposition 5, en remarquant pour cela que tout automorphisme intérieur d'une algèbre de Levi d'une algèbre de Lie réelle, s'étend en un automorphisme intérieur de l'algèbre de Lie.

# Lemme 11 On conserve les hypothèses et notations du Théorème 1.

- (i) Si  $\mathfrak{f}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{h}$ , il existe des éléments réguliers de  $\mathfrak{g}$  contenus dans  $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ . Le centralisateur dans  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{j}$ , de  $\tilde{\mathfrak{f}} := \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ , est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , contenue dans  $\mathfrak{l}$ , vérifiant  $\mathfrak{j} = (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$ .
- (ii) Si  $\mathfrak f$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak h$ ,  $\mathfrak f \oplus \mathfrak i_{\mathfrak a}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak i$ .
- (iii) Toute sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak i$  (resp. sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak i$  contenue dans  $\mathfrak h + \mathfrak i_\mathfrak a$ ) est conjuguée, par un automorphisme intérieur de  $\mathfrak i$ , (resp. égale) à une algèbre de ce type.
- (iv) Soit  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{i}$ . Il existe une unique décomposition de Langlands  $\mathfrak{l}'+\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{p}$ , telle que  $\mathfrak{l}'$  contienne  $\tilde{\mathfrak{f}}'$ . Alors, notant  $\mathfrak{f}':=\tilde{\mathfrak{f}}'\cap\mathfrak{l}'^{der}$ , on a  $\tilde{\mathfrak{f}}'=\mathfrak{f}'+(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{a}')$ , où  $\mathfrak{a}'$  est le centre de  $\mathfrak{l}'$ . De plus  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i}$ , si et seulement si  $\mathfrak{f}'$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{h}':=\mathfrak{i}\cap\mathfrak{l}'^{der}$

#### Démonstration :

réelle.

Montrons (i). On raisonne par l'absurde. On note  $\mathfrak{j}'$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , qui contient  $\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{a}$ . Celle-ci existe puisque les éléments de  $\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{a}$ 

sont semi-simples. Supposons qu'aucun élément de  $\tilde{\mathfrak{f}}:=\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  ne soit régulier dans  $\mathfrak{g}$ . Alors, pour tout  $X\in \tilde{\mathfrak{f}}$ , il existe une racine  $\alpha_X$  de  $\mathfrak{j}'$  dans  $\mathfrak{g}$ , nulle sur X. Pour une racine donnée, l'intersection de son noyau avec  $\tilde{\mathfrak{f}}$  est un fermé de  $\tilde{\mathfrak{f}}$ . Notre hypothèse montre que  $\tilde{\mathfrak{f}}$  est la réunion de ces fermés. Il en résulte que l'un de ces sous-espaces vectoriels est d'intérieur non vide, donc égal à  $\tilde{\mathfrak{f}}$ . Cela signifie qu'une racine de  $\mathfrak{j}'$  s'annule sur  $\tilde{\mathfrak{f}}$ . Alors, d'après le Lemme 7, dont on vérifie aisément qu'il est valable pour toute décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ , celle-ci doit être nulle sur  $\mathfrak{a}$ . C'est donc une racine de  $\mathfrak{j}'$  dans  $\mathfrak{m}$ , qui ne peut être nulle sur  $\mathfrak{f}$ . Une contradiction qui prouve la première partie de (i). Le centralisateur  $\mathfrak{f}$  de  $\tilde{\mathfrak{f}}$  est donc une sous-algèbre de Cartan. Par ailleurs  $\mathfrak{f}$  contient  $\mathfrak{a}$ . On en déduit la deuxième partie de (i).

D'après le Lemme 7, le nilespace de  $\mathfrak{f}$  dans  $\mathfrak{n}$  est réduit à zéro. Comme  $\mathfrak{f}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{h}$ , le nilespace de  $\tilde{\mathfrak{f}}$  dans  $\mathfrak{h}$  est égal à  $\mathfrak{f}$ . Finalement le nilespace de  $\tilde{\mathfrak{f}}$  dans  $\mathfrak{i}$  est égal à  $\tilde{\mathfrak{f}}$ . Alors (ii) résulte de [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.1, Proposition 3.

Montrons (iii). Soit  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  une autre sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{i}$ . La projection,  $\tilde{\mathfrak{f}}''$ , de  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  sur  $\tilde{\mathfrak{h}}:=\mathfrak{h}+\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ , parallèlement à  $\mathfrak{n}$ , est une sous-algèbre de Cartan de  $\tilde{\mathfrak{h}}$  (cf. [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.1, Corollaire 2 de la Proposition 4), donc de la forme  $\mathfrak{f}'+\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ , où  $\mathfrak{f}'$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{h}$ . Alors  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  et  $\tilde{\mathfrak{f}}''$  sont deux sous algèbres de Cartan de  $\mathfrak{i}$ , ayant la même projection sur  $\tilde{\mathfrak{h}}$ , parallèlement à  $\mathfrak{n}$ , donc conjuguées par un automorphisme intérieur de  $\mathfrak{i}$ , d'après [Bou], Ch. VII, Paragraphe 3.5, Proposition 5 (voir aussi après la Définition 3). Si de plus  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  est contenue dans  $\tilde{\mathfrak{h}}$ , le raisonnement ci-dessus montre qu'elle a la forme indiquée. Ce qui prouve (iii).

Prouvons (iv). Grâce à (iii), on se ramène, par conjugaison, au cas où  $\mathfrak{f}'$  est contenue dans  $\mathfrak{l}$  et comme dans (i). Si  $\mathfrak{l}'+\mathfrak{n}$  est une décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{l}'$  contient  $\tilde{\mathfrak{f}}'$ ,  $\mathfrak{l}'$  contient un élément régulier de  $\mathfrak{g}$ , contenu dans  $\tilde{\mathfrak{f}}'$ , dont le centralisateur dans  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , contenue dans  $\mathfrak{l}'$ . Celle-ci est égale au centralisateur dans  $\mathfrak{g}$  de  $\tilde{\mathfrak{f}}'$ . D'où l'unicité de  $\mathfrak{l}'$ , grâce aux propriétés des décompositions de Langlands (cf. Lemme 3 (i)). L'assertion sur les sous-algèbre de Cartan fondamentales est claire car  $\mathfrak{h}'$  est une sous-algèbre de Levi de  $\mathfrak{i}$ , d'après le Théorème 1.  $\square$ 

# 2 Triples de Manin pour une algèbre de Lie réductive complexe : Descente

Dans toute la suite  $\mathfrak{g}$  désignera une algèbre de Lie réductive complexe. On fixe,  $j_0$ , une sous algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{b}_0$  une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$ , contenant  $j_0$ . On note  $\mathfrak{b}'_0$  la sous-algèbre de Borel opposée à  $\mathfrak{b}_0$ , relativement à  $j_0$ .

**Définition 4** Un triple de Manin pour  $\mathfrak{g}$  est un triplet  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ , où B est une forme de Manin sur  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$  sont des sous-algèbres de Lie réelles de  $\mathfrak{g}$ , isotropes pour B, telles que  $\mathfrak{g} =: \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}'$ . La signature de B étant égale

à  $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g})$ , i et i' sont Lagrangiennes. Un s-triple est un triple de Manin pour lequel la forme est spéciale.

Si i est sous p et i' est sous p', on dit que le triple de Manin est sous (p, p')

Remarque 1 D'après le Lemme 2 (v), si g est simple, la notion de s-triple et de triple de Manin coincident.

On note G le groupe connexe , simplement connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{s}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , on note S le sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{s}$ . Comme  $\mathfrak{g}$  est complexe, les sous-groupes paraboliques de  $\mathfrak{g}$  sont connexes (cf. [Bor], Théoréme 11.16). Donc, si  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , P est le sous-groupe parabolique de G, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$ . On remarque que G agit sur l'ensemble des triples de Manin , en posant, pour tout triple de Manin  $(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$  et tout  $g\in G$ :

$$g(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}') := (B, Ad \ g(\mathfrak{i}), Ad \ g(\mathfrak{i}'))$$

Notre but est construire, par récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}^{der}$ , tous les triples de Manin modulo cette action de  $\mathfrak{g}$ .

**Proposition 1** Tout triple de Manin est conjugué, sous l'action de G, à un triple de Manin  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , avec  $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{b}'_0 \subset \mathfrak{p}'$  (un tel triple de Manin sera dit standard).

De plus  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$  sont uniques.

Démonstration :

On rappelle (cf. [Bor], Corollaire 14.13) que :

L' intersection de deux sous – algèbres de Borel de  $\mathfrak{g}$ ,  $\underline{\mathfrak{b}}$ ,

contient une sous – algèbre de Cartan de 
$$\mathfrak{g}$$
 (2.1)

Soit  $(B, \underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{i}}')$  un triple de Manin sous  $(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{p}}')$ . Soit  $\underline{\mathbf{b}}$  (resp.  $\underline{\mathbf{b}}'$ ) une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$ , contenue dans  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\underline{\mathfrak{p}}'$ ).

On a  $\mathfrak{g} = \underline{\mathfrak{i}} + \underline{\mathfrak{i}}' \subset \underline{\mathfrak{p}} + \underline{\mathfrak{p}}'$ . Donc  $\underline{\mathfrak{p}} + \underline{\mathfrak{p}}'$  est égal à  $\mathfrak{g}$  et  $\underline{P} \, \underline{P}'$  est ouvert dans G. Mais  $\underline{P} \, \underline{P}'$  est réunion de  $(\underline{B}, \underline{B}')$ -doubles classes, qui sont en nombre fini (Bruhat). L'une de ces doubles classes contenues dans  $\underline{P} \, \underline{P}'$  doit donc être ouverte. Soit  $p \in \underline{P}$  et  $p' \in \underline{P}'$ , tels que  $\underline{B}pp'\underline{B}'$  soit un ouvert de G. On pose  $B_1 = p^{-1}\underline{B}p$ ,  $B_1' = p'\underline{B}'p'^{-1}$ . Alors le sous-groupe de Borel de G,  $B_1$  (resp.  $B_1'$ ), est contenu dans P (resp. P') et  $B_1B_1'$  est ouvert dans G. Donc, on a  $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_1' = \mathfrak{g}$  et l'intersection de  $\mathfrak{b}_1$  et  $\mathfrak{b}_1'$  contient une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{j}_1$  (cf. (2.1)). Pour des raisons de dimension, cette intersection est réduite à  $\mathfrak{j}_1$ . Alors  $\mathfrak{b}_1$  et  $\mathfrak{b}_1'$  sont opposées relativement à  $\mathfrak{j}_1$ . D'après [Bor], Proposition 11.19, il existe  $g' \in G$  tel que  $Ad \, g'(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_0$ ,  $Ad \, g'(\mathfrak{j}_1) = \mathfrak{j}_0$ . Alors  $Ad \, g'(\mathfrak{b}_1')$  est égal à  $\mathfrak{b}_0'$ . Alors, notant  $\mathfrak{i} = Ad \, g'(\underline{\mathfrak{i}})$ ,  $\mathfrak{i}' = Ad \, g'(\underline{\mathfrak{i}}')$ , on voit que  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  vérifie les propriétés voulues.

L'unicité de  $\mathfrak{p}$  résulte du fait que deux sous-algèbres paraboliques de  $\mathfrak{g}$ , conjuguées par un élément de G et contenant une même sous-algèbre de Borel, sont égales (cf. [Bor], Corollaire 11.17).

On fixe désormais  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\mathfrak{p}'$ ) une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , contenant  $\mathfrak{b}_0$  (resp.  $\mathfrak{b}'_0$ ). On note  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$  (resp.  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{n}'$ ) la décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\mathfrak{p}'$ ) telle que  $\mathfrak{l}$  (resp.  $\mathfrak{l}'$ ) contienne  $\mathfrak{j}_0$  (cf. Lemme 3). On note  $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}^{der}$ ,  $\mathfrak{a}$  le centre de  $\mathfrak{l}$ . Si  $\mathfrak{l}$  est une sous-algèbre de Lie réelle de  $\mathfrak{g}$ , Lagrangienne pour une forme de Manin, on notera  $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{l}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_a$ . On introduit des notations similaires pour  $\mathfrak{p}'$ .

Comme  $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{p}$  (resp.  $\mathfrak{b}'_0 \subset \mathfrak{p}'$ ),  $\mathfrak{n}$  (resp.  $\mathfrak{n}'$ ) est contenu dans le radical nilpotent de  $\mathfrak{b}_0$  (resp.  $\mathfrak{b}'_0$ ). Ces derniers sont d'intersection réduite à zéro, donc :

$$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}' = \{0\} \tag{2.2}$$

Décomposant  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$  en sous-espaces poids sous  $\mathfrak{j}_0$ , on voit que :

$$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}). \tag{2.3}$$

**Proposition 2** (i) Si un élément de G conjugue deux triples de Manin sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , c'est un élément de  $P \cap P'$ .

(ii) Le groupe  $L \cap L'$  est égal au sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . Notons  $N_{L'}$  (resp.  $N'_L$ ), le sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}'$  (resp.  $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$ ). Alors on a:

$$P \cap P' = (L \cap L')N_{L'}N_{L}'$$

De plus  $N_{L'}$  et  $N'_L$  commutent entre eux.

#### Démonstration :

Si  $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$  et  $(B, \underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{i}}')$  sont deux triples de Manin sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , conjugués par un élément, g, de G, celui-ci conjugue le radical nilpotent de  $\mathbf{i}$  avec celui de  $\underline{\mathbf{i}}$ , donc normalise  $\mathfrak{n}$ , puisque les deux triples de Manin sont sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ . Mais un élément du normalisateur, Q, dans G de  $\mathfrak{n}$ , normalise le normalisateur dans  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{n}$ , c'est à dire  $\mathfrak{p}$ , comme on l'a vu plus haut (cf. (1. 17)). Comme P est connexe, les éléments de Q normalisent P. Donc Q est inclus dans P et  $g \in P$ . De même, on a  $g \in P'$ . D'où (i)

Montrons (ii). Il est clair que  $P \cap P'$  est un sous-groupe de Lie de G, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ . On a :

$$[\mathfrak{n}\cap\mathfrak{l}',\mathfrak{n}'\cap\mathfrak{l}]\subset[\mathfrak{n},\mathfrak{l}]\cap[\mathfrak{n}',\mathfrak{l}']\subset\mathfrak{n}\cap\mathfrak{n}'$$

Donc  $N_{L'}$  et  $N'_L$  commutent entre eux, d'après (2.1). Alors  $(L \cap L')^0 N_{L'} N'_L$  est un sous-goupe ouvert et connexe de  $P \cap P'$ , donc on a :

$$(P \cap P')^0 = (L \cap L')^0 N_{L'} N_L' \tag{2.4}$$

Soit  $g \in P \cap P'$ . Alors  $Adg(j_0)$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , contenue dans  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ , c'est donc une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$  (cf [Bou], Ch. VIII, Paragraphe 2.1, Exemple 3), donc conjugué, par un élément g' de  $(P \cap P')^0$ , à  $j_0$ , puisqu'il s'agit d'algèbres de Lie complexes. Donc  $Adg'g(j_0) = j_0$  et g'g est un élément de  $P \cap P'$ . En utilisant la décomposition de Bruhat de G et G, pour G, on voit que G centralise le centre G de G. De même on voit que G0 centralise le centre G1 dans G2. Mais G3 dans G4 dans G5. Mais G6 d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{p}'' = (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}') \oplus \mathfrak{n}$$

Or P'' est connexe, puisque G est complexe. Donc L'' est connexe. Par ailleurs, il contient  $L \cap L'$  et a même algèbre de Lie que  $L \cap L'$ . Donc on a :

$$L'' = L \cap L' = (L \cap L')^{0}$$
(2.5)

On conclut alors que  $g'g \in (L \cap L')^0$ . Donc g est un élément de  $(P \cap P')^0$ . Ce qui précède montre que :

$$P \cap P' = (P \cap P')^0$$

On achève de prouver (ii), grâce à (2.4) et (2.5).

Le Lemme suivant est une conséquence facile de résultats de Gantmacher (cf. [G]).

**Lemme 12** Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux automorphismes involutifs et antilinéaires d'une algè-

bre de Lie semi-simple complexe,  $\mathfrak{m}$ , celle-ci contient au moins un élément non nul et invariant par ces deux involutions.

#### Démonstration :

Avec nos hypothèses  $\sigma\sigma'$  est un automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\mathfrak{m}$ , dont l'espace des points fixes,  $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ , est un espace vectoriel complexe, non réduit à zéro d'après [G], Théorème 28. Mais  $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ , est égal à  $\{X \in \mathfrak{m} | \sigma(X) = \sigma'(X)\}$  donc aussi égal à  $\mathfrak{m}^{\sigma'\sigma}$ . Si  $X \in \mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ , on a donc  $\sigma'(\sigma(X)) = X$ , soit encore  $\sigma'(\sigma(X)) = \sigma(\sigma(X))$ . Donc  $\sigma(X)$  est élément de  $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ . Par suite  $\sigma$ , restreint à  $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$  est une involution antilinéaire de  $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ . L'ensemble de ses points fixes est une forme réelle de  $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ , donc il est non réduit à zéro. Mais cet ensemble est égal à  $\mathfrak{m}^{\sigma} \cap \mathfrak{m}^{\sigma'}$ .

**Proposition 3** Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux af-involutions d'une algèbre de Lie semisimple complexe,  $\mathfrak{m}$ , elle contient au moins un élément non nul et invariant par ces deux involutions.

#### Démonstration :

On note  $\mathfrak{m}_j$ ,  $j=1,\ldots,r$ , les idéaux simples de  $\mathfrak{m}$ . On définit une involution

 $\theta$  de  $\{1,\ldots,r\}$  caractérisée par :  $\sigma(\mathfrak{m}_j) = \mathfrak{m}_{\theta(j)}, \ j=1,\ldots,r$ . Nous allons d'abord étudier le cas suivant :

Il existe j tel que 
$$\theta(j) = \theta'(j) = j$$
 (2.6)

Dans ce cas, la restriction de  $\sigma$  et  $\sigma'$  à  $\mathfrak{m}_j$ , sont deux automorphismes involutifs et antilinéaires de  $\mathfrak{m}$ , d'après le Corollaire du Lemme 6, qui ont des points fixes non nuls en commun, d'après le Lemme précédent. La Proposition en résulte, dans ce cas.

Supposons maintenant:

Il existe 
$$j$$
 tel que  $\theta(j) = \theta'(j) \neq j$  (2.7)

On note  $j' := \theta(j)$ . Il est clair que :  $(\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma} = \{(X, \sigma(X)) | X \in \mathfrak{m}_j\}$  et de même pour  $(\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma'}$ . Il existe un élément non nul, X de  $\mathfrak{m}_j$  tel que  $(\sigma'^{-1}\sigma)(X) = X$ , car  $\sigma'^{-1}\sigma$  est un automorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak{m}_j$  (cf. [G], Théorème 28). Alors  $(X, \sigma(X))$  est un élément non nul de  $(\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma} \cap (\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma'}$ , ce qui prouve la Proposition dans ce cas. Il nous reste à étudier le cas suivant :

Pour tout 
$$j$$
,  $\theta(j) \neq \theta'(j)$  (2.8)

On construit, pour tout j, par récurrence sur n, une suite  $j_1 = j, j_2, \ldots, j_n, \ldots$ , telle que :

$$pour \ tout \ n, \ j_{n+1} \neq j_n \tag{2.9}$$

pour tout 
$$n$$
,  $j_{n+1} = \theta(j_n)$  ou  $\theta'(j_n)$  (2.10)

Plus précisément, on pose

$$j_2 = \theta(1) \ si \ \theta(1) \neq 1, \ j_2 = \theta'(1)sinon$$
 (2.11)

et, pour  $n \ge 2$ , on pose :

$$j_{n+1} = \theta(j_n) \text{ si } j_n = \theta'(j_{n-1}) \text{ et } \theta(j_n) \neq j_n$$

$$j_{n+1} = \theta'(j_n) \text{ si } j_n = \theta'(j_{n-1}) \text{ et } \theta(j_n) = j_n$$

$$j_{n+1} = \theta'(j_n) \text{ si } j_n = \theta(j_{n-1}) \text{ et } \theta'(j_n) \neq j_n$$

$$j_{n+1} = \theta(j_n) \text{ si } j_n = \theta(j_{n-1}) \text{ et } \theta'(j_n) = j_n$$
(2.12)

Ces relations définissent la suite  $(j_n)$ , car, à cause de (2.8), on a nécessairement  $\theta(j_n) \neq \theta'(j_n)$  et  $\theta(j_{n-1}) \neq \theta'(j_{n-1})$ . Par ailleurs les relations (2.9) et (2.10) sont vérifiées, la première résultant d'une récurrence immédiate. On obtient également les relations suivantes :

Pour 
$$n \geq 2$$
, si  $\theta(j_n) \neq j_n$  et si  $\theta'(j_n) \neq j_n$  on  $a$ :
$$(j_{n-1}, j_n, j_{n+1}) \text{ est \'egal \`a } (\theta(j_n), j_n, \theta'(j_n)) \text{ ou \`a } (\theta'(j_n), j_n, \theta(j_n)) \quad (2.13)$$

Pour 
$$n \ge 2$$
 et si  $\theta(j_n) = j_n$  ou si  $\theta'(j_n) = j_n$  on  $a: j_{n-1} = j_{n+1}$  (2.14)

Après renumérotation des  $\mathfrak{g}_j$ , on peut supposer que le début de la suite  $(j_n)$ , s'écrit  $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_p = p, j_{p+1} = k < p$ On fait d'abord la convention suivante :

$$S'$$
 il existe  $j$  tel que  $\theta(j) = j$  ou  $\theta'(j) = j$ , on suppose qu' on

l'a choisi comme premier élément, et, quitte à échanger le role

de 
$$\theta$$
 et  $\theta'$ , qu'il est fixé par  $\theta$ . On a alors  $\theta(1) = 1$ ,  $\theta'(1) = 2$  (2.15)

Traitons le cas où p=2. Alors  $j_1=j_3$ , et (2.8), (2.13) montrent que  $\theta(2)$  ou  $\theta'(2)$  est égal à 2. Alors on doit avoir  $\theta(1)=1$ , d'après (2.15), puis  $\theta'(1)=2$  d'après (2.11). Comme  $\theta'(1)=2$ , on a nécessairement  $\theta(2)=2$ . Dans ce cas, un élément  $(X_1,X_2) \in \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$  est invariant par  $\sigma$  et  $\sigma'$  si et seulement si on a :

$$X_1 = \sigma(X_1), \ X_2 = \sigma(X_2), \ X_2 = \sigma'(X_1)$$

ce qui équivaut au système :

$$X_1 = \sigma(X_1), \ X_1 = (\sigma'^{-1}\sigma\sigma')(X_1), \ X_2 = \sigma'(X_1)$$

Mais la restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_1$  (resp.  $\mathfrak{m}_2$ ) est un automorphisme involutif antilinéaire, puisque  $\theta(1)=1$  et  $\theta(2)=2$  (cf. le Corollaire du Lemme 6). De plus, la restriction de  $\sigma'$  à  $\mathfrak{m}_1$  est soit  $\mathbb{C}$ -linéaire, soit antilinéaire, d'après le Lemme 6. Alors, la restriction de  $\sigma'^{-1}\sigma\sigma'$  à  $\mathfrak{m}_1$  est un automorphisme involutif antilinéaire. Alors, dans le cas p=2, la Proposition résulte du Lemme 12.

On suppose maintenant:

$$p > 2 \tag{2.16}$$

On remarque d'abord que :

Si 
$$j = 2, \dots, p-1$$
, on a  $\theta(j) \neq j$  et  $\theta'(j) \neq j$  (2.17)

En effet, si on avait par exemple  $\theta(j) = j$ , (2.14) conduirait à j - 1 = j + 1 une contradiction qui prouve (2.17).

Montrons maintenant que :

$$k = 1 \ ou \ p - 1$$
 (2.18)

Supposons  $k \neq 1$ . Alors, on a  $1 < k \leq p-1$ . Alors d'après (2.13) et (2.14), on a l'égalité d'ensembles :

$$\{\theta(k), \theta'(k)\} = \{k - 1, k + 1\},\tag{2.19}$$

ce qui implique :

$$\theta(k) \neq k, \ \theta'(k) \neq k$$
 (2.20)

Comme  $j_{p+1} = k$ , on déduit de (2.20) et (2.13) que la séquence  $(j_p, j_{p+1}, j_{p+2})$  est égale soit à  $(\theta(k), k, \theta'(k))$ , soit à  $(\theta'(k), k, \theta(k))$ , c'est à dire, grâce à (2.19)), soit à (k-1, k, k+1), soit à (k+1, k, k-1). Mais  $j_p = p$ , est

différent de k-1. Donc p=k+1, i.e. k=p-1. Ceci achève de prouver (2.18).

Traitons d'abord le cas :

$$k = 1 \tag{2.21}$$

Comme p > 2, on a  $1 \neq p - 1$ . Donc  $j_{p-1} = p - 1$ , est différent de  $j_{p+1} = 1$ . Alors, (2.14), (2.13) impliquent l'égalité d'ensembles :

$$\{\theta(p), \theta'(p)\} = \{p - 1, 1\} \tag{2.22}$$

Supposons, d'abord que  $\theta'(1) = 2$ , ce qui implique, d'après (2.11), que  $\theta(1) = 1$ . Comme p > 2, ni  $\theta(p)$ , ni  $\theta'(p)$  ne peut être égal à 1. Une contradiction avec l'équation précédente qui montre que l'on doit avoir, d'après (2.11) :

$$\theta(1) = 2 \tag{2.23}$$

Comme p > 2, la seule possibilité laissée par (2.22) est :

$$\theta(p-1) = p \ et \ \theta'(p) = 1$$
 (2.24)

On déduit de (2.23) et (2.17), joints à (2.13), que, pour  $j=1,\ldots,p-1,$  on a :

$$\theta(j) = j + 1$$
, si j est impair (resp.  $\theta'(j) = j + 1$  si j est pair) (2.25)

ce qui, joint à (2.24), implique que p est pair. Notons p = 2q.

On déduit de (2.25) et (2.23) qu'un élément  $(X_1, \ldots, X_p)$  de  $\mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_p$ , est invariant à la fois par  $\sigma$  et  $\sigma'$  si et seulement si le système suivant est vérifié:

$$\sigma(X_1) = X_2, \ \sigma'(X_2) = X_3$$

$$\dots, \dots$$

$$\sigma(X_{2j-1}) = X_{2j}, \ \sigma'(X_{2j}) = X_{2j+1}$$

$$\dots, \dots$$

$$\sigma(X_{2q-1}) = X_{2q}, \ \sigma'(X_{2q}) = X_1$$

Notons  $\tau$  la restriction de  $(\sigma'\sigma)^q$  à  $\mathfrak{m}_1$ , qui est un automorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak{m}_1$ . Ce système possède une solution non nulle si et seulement si l'équation :

$$X_1 = \tau(X_1), \ X_1 \in \mathfrak{m}_1$$

possède une solution non nulle. C'est le cas, d'après [G], Théorème 28. Ceci achève de prouver la Proposition dans le cas k=1.

On suppose maintenant:

$$k = p - 1 > 1 \tag{2.26}$$

Comme  $(j_{p-1}, j_p, j_{p+1}) = (p-1, p, p-1)$ , on déduit de (2.13), (2.14) et (2.8), que l'on a soit :

$$\theta(p) = p, \ \theta'(p) = p - 1$$
 (2.27)

soit:

$$\theta(p) = p - 1, \ \theta'(p) = p$$
 (2.28)

Alors, d'après notre convention (2.15), on a  $\theta(1) = 1$ . Supposons (2.27) vérifié. Comme ci-dessus, ceci joint à (2.23) et (2.13), montre que p est pair et que , pour  $j = 1, \ldots, p-1$ , on a :

$$\theta'(j) = j + 1$$
, si j est impair (resp.  $\theta(j) = j + 1$  si j est pair) (2.29)

On note p=2q. On déduit de (2.28) et (2.29) qu'un élément  $(X_1,\ldots,X_p)$  de  $\mathfrak{m}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{m}_p$ , est invariant à la fois par  $\sigma$  et  $\sigma'$  si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\sigma(X_1) = X_1, \ \sigma'(X_1) = X_2$$

$$\dots, \dots$$

$$\sigma(X_{2j}) = X_{2j+1}, \ \sigma'(X_{2j+1}) = X_{2j+2}$$

$$\dots, \dots$$

$$\sigma(X_{2q-2}) = X_{2q-1}, \ \sigma'(X_{2q-1}) = X_{2q}$$

$$\sigma(X_{2q}) = X_{2q}$$

Notant  $\tau$  la restriction de  $(\sigma'\sigma)^q$  à  $\mathfrak{m}_1$ , qui est un automorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak{m}_1$ , ce système possède une solution non nulle si et seulement si le système :

$$X_1 = \sigma(X_1), \ X_1 = (\tau^{-1}\sigma\tau)(X_1), \ X_1 \in \mathfrak{m}_1$$
 (2.30)

possède une solution non nulle. La restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_1$  et  $\mathfrak{m}_p$  est antilinéaire. Par ailleurs  $\tau$  est soit  $\mathbb{C}$ -linéaire, soit antilinéaire, d'après le Lemme 6. Donc la restriction à  $\mathfrak{m}_1$  de  $\tau^{-1}\sigma\tau$  est antilinéaire. Il résulte alors du Lemme 12, que (2.30) à une solution non nulle. Ce qui achève la preuve de la Proposition dans le cas étudié. Le cas où (2.28) est satisfait se traite de manière similaire, mais alors p est impair.

Ceci achève notre discussion et la preuve de la Proposition.

**Théorème 2** Si  $\mathfrak{g}$  n'est pas commutative et si  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  est un triple de Manin de  $\mathfrak{g}$ , sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ ,  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$  est différent de  $\mathfrak{g}$ .

#### Démonstration :

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un triple de Manin ,  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ , sous  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ , et que  $\mathfrak{g}$  ne soit pas commutative. Alors  $\mathfrak{h} := \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}^{der}$  (resp.  $\mathfrak{h}' := \mathfrak{i}' \cap \mathfrak{g}^{der}$ ) est l'espace des points fixes d'une af-involutions  $\sigma$  (resp.  $\sigma'$ ) de  $\mathfrak{g}^{der}$ , d'après le Théorème 1. En appliquant la Proposition précédente, on aboutit à une contradiction avec l'hypothése  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}' = \{0\}$ , ce qui achève de prouver le Théorème .

Soit V un sous-espace  $j_0$  invariant de  $\mathfrak{g}$ . On suppose qu'il est lasomme de sous-espaces poids de  $\mathfrak{g}$  pour  $j_0$ , ce qui s'écrit aussi :

$$V = \sum_{\{\lambda \in \mathbf{j}_0^* | V^{\lambda} \neq \{0\}\}} \mathfrak{g}^{\lambda}$$

Alors V admet un unique supplémentaire  $\mathfrak{j}_0$ -invariant,  $V^\perp$ , qui est égal à la somme des sous-espaces poids de  $\mathfrak{g}$  qui ont une intersection nulle avec V, soit encore :

$$V^{\perp} = \sum_{\{\lambda \in \mathfrak{j}_0^* \mid \mathfrak{g}^{\lambda} \cap V = \{0\}\}} \mathfrak{g}^{\lambda}$$

On note  $p_V$  (resp.  $p^V$ , la projection de  $\mathfrak{g}$  sur V (resp.  $V^{\perp}$ ) parallèlement à  $V^{\perp}$  (resp. V). Tout sous-espace  $\mathfrak{j}_0$ -invariant est stable sous  $p^V$  et  $p_V$ .

Si de plus V est  $\mathfrak{l}$ -invariant,  $V^{\perp}$  est aussi  $\mathfrak{l}$ -invariant. En effet, comme  $\mathfrak{l}$  est réductive dans  $\mathfrak{g}$ , V admet un supplémentaire  $\mathfrak{l}$ -invariant qui n'est autre que  $V^{\perp}$ . On voit aussi que dans ce cas,  $V^{\perp}$  ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{j}_0$  de  $\mathfrak{g}$ , contenue dans  $\mathfrak{l}$ . On a le même fait pour  $\mathfrak{l}'$  et  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ .

**Théorème 3** Soit B une forme de Manin réelle (resp. complexe) sur  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{i}'$  des sous-algèbres de Lie Lagrangiennes de  $\mathfrak{g}$  pour B, avec  $\mathfrak{i}$  sous  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{i}'$  sous  $\mathfrak{p}'$ . On a, grâce au Théorème 1,  $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ , où  $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$ . On note  $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$ . On fait de même pour  $\mathfrak{i}'$ .

Les conditions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :

- (i) (B, i, i') est un triple de Manin
- (ii) Notant  $\mathfrak{i}_1 = p^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$ ,  $\mathfrak{i}'_1 = p^{\mathfrak{n}}(\tilde{\mathfrak{h}}' \cap \mathfrak{p})$ , on a:
- a)  $i_1$  et  $i'_1$  sont contenues dans  $l \cap l'$ , et  $(B_1, i_1, i'_1)$  est un triple de Manin dans  $l \cap l'$ , où  $B_1$  désigne la restriction de B à  $l \cap l'$ .
- b)  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}'$  et  $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h}$  sont réduits à zéro.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on appellera  $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1')$  l'antécédent du triple de Manin  $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$ .

#### Démonstration :

Montrons que (i) implique (ii). Supposons que  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  soit un triple de Manin dans  $\mathfrak{g}$ . Pour des raisons de dimension, ceci équivaut à  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}' = \{0\}$ . Ceci implique immédiatement la propriété b) de (ii).

Montrons ensuite que  $i_1$  est une sous-algèbre de Lie réelle (resp. complexe) de  $l \cap l'$ , et isotrope pour  $B_1$ .

Etudiant les sous-espaces poids sous  $j_0$ , on voit que :

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}')$$
 (2.31)

Comme  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$  est  $\mathfrak{j}_0$ -invariant et que  $p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}')$  est réduit à zéro, on a :

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}')\subset\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}'$$

Il en résulte que  $\mathfrak{i}_1$  est bien contenu dans  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . Par ailleurs, la restriction de  $p^{\mathfrak{n}'}$  à  $\mathfrak{p}'$  est la projection sur  $\mathfrak{l}'$ , parallèlement à  $\mathfrak{n}'$ . C'est donc un morphisme

d'algèbres de Lie, ce qui implique que  $\mathfrak{i}_1$  est une sous-algèbre de Lie rélle de  $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}'.$ 

Soit  $X, X_1 \in \mathfrak{i}_1$ . Ce sont des éléments de  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ , et il existe N' et  $N_1' \in \mathfrak{n}'$  tels que Y et  $Y_1$  soient éléments de  $\mathfrak{i}$ , où :

$$Y := X + N', Y_1 := X_1 + N_1'$$

Par ailleurs  $\mathfrak{n}'$  et  $\mathfrak{p}'$  sont orthogonaux pour B (cf. la fin de la démonstration du Théorème 1). Un calcul immédiat montre alors que  $B(Y,Y_1)$  est égal à  $B_1(X,X_1)$ . Comme  $Y,Y_1 \in \mathfrak{i}$ ,  $B(Y,Y_1)$  est nul. Finalement,  $\mathfrak{i}_1$  est isotrope pour  $B_1$ . On montre de même des propriétés similaires pour  $\mathfrak{i}_1'$ .

Montrons  $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}'_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . Soit  $X \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . Alors X = I + I', avec  $I \in \mathfrak{i}$ ,  $I' \in \mathfrak{i}'$ . Ecrivons I = H + N, I' = H' + N' où  $H \in \tilde{\mathfrak{h}}$ ,  $H' \in \tilde{\mathfrak{h}}'$ ,  $N \in \mathfrak{n}$ ,  $N' \in \mathfrak{n}'$ . On a donc :

$$X = H + N + H' + N' \tag{2.32}$$

ce qui implique : H = X - H' - N' - N. On voit ainsi que H est élément de  $(\mathfrak{p}' + \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{l}$ . Décomposant sous l'action de  $\mathfrak{j}_0$ , on voit que :

$$(\mathfrak{p}'+\mathfrak{n})\cap\mathfrak{l}=\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{l}\tag{2.33}$$

Finalement H est élément de  $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ . de même, on voit que H' est élément de  $\tilde{\mathfrak{h}}' \cap \mathfrak{p}$ . Par ailleurs,  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{n}'$  sont des sous-espaces  $\mathfrak{j}_0$ -invariants et en somme directe avec  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . Donc, appliquant  $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$  à (2.32), on a :

$$X = p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) + p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H')$$

De (2.31), on déduit que la restriction de  $p_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}'}$  à  $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}'$  est égale à la restriction de  $p^{\mathfrak{n}'}$  à  $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}'$ . Donc, on a :

$$p_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}'}(H)=p^{\mathfrak{n}'}(H)\in\mathfrak{i}_1$$

on obtient de même :

$$p_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}'}(H)\in\mathfrak{i}'_1$$

et l'on conclut que :

$$X \in \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_1'$$

Ceci achève de prouver que :

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_1' \tag{2.34}$$

Par ailleurs:

 $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$  est le centralisateur d'un élément semi – simple de  $\mathfrak{g}$ , dont

l'image par la représentation adjointe n'a que des valeurs propres réelles (2.35)

En effet  $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus ((\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n})$  est une décomposition de Langlands d'une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .

Alors la restriction  $B_1$  de B à  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$  est une forme de Manin (cf. Corollaire du Lemme 2), et  $\mathfrak{i}_1$ ,  $\mathfrak{i}'_1$ , qui sont isotropes pour  $B_1$ , sont de dimensions réelles inférieures ou égales à la dimension complexe de  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . La somme dans (2.34) est nécessairement directe, ce qui achève de prouver que (i) implique (ii). Montrons que (ii) implique (i). Supposons satisfaites les conditions a) et b) de (i). Montrons que  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$  est réduit à zéro. Soit X un élément de  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$ . Alors :

$$X = H + N = H' + N', \ où \ H \in \tilde{\mathfrak{h}}, \ H' \in \tilde{\mathfrak{h}}', \ N \in \mathfrak{n}, \ N' \in \mathfrak{n}'$$
 (2.36)

On a alors:

$$H = H' + N' - N \in \mathfrak{l} \cap (\mathfrak{p}' + \mathfrak{n})$$

(2.33) implique que  $H \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$ . De même, on montre que  $H' \in \mathfrak{l}' \cap \mathfrak{p}$ . Appliquant  $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$  à (2.36), on voit que :

$$p_{\mathsf{I}\cap\mathsf{I}'}(X) = p_{\mathsf{I}\cap\mathsf{I}'}(H) = p_{\mathsf{I}\cap\mathsf{I}'}(H')$$

et, grâce à la première partie de la démonstration, cela conduit à :

$$p_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}'}(X) = p^{\mathfrak{n}'}(H) = p^{\mathfrak{n}}(H') \in \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_1'$$

Donc on a:

$$p^{\mathfrak{n}'}(H) = p^{\mathfrak{n}}(H') = 0$$

Mais  $p^{\mathfrak{n}'}$  est injective sur  $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ , car  $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$  est réduit à zéro. En effet  $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$  est contenu dans  $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$ . On voit que cette dernière intersection est égal à  $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{m}$ . Donc  $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$  est égal à  $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h}$ , qui est réduit à zéro, d'après b). Donc H est nul et il en va de même de H'. Alors X est un élément de  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'$ , qui est réduit à zéro, d'après nos hypothèses sur  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}'$ . Donc X est nul et  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$  est réduit à zéro. Alors la somme  $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}'$  est directe, et l'on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}'$  pour des raisons de dimension. Ceci achève de prouver le Théorème.

**Proposition 4** Si  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  est un triple de Manin sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , d'antécédent  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ , et si  $g = nn'x \in P \cap P'$ , où  $x \in L \cap L'$ ,  $n \in N_{L'}$ ,  $n' \in N'_L$ , l'antécédent de  $(B, Ad g(\mathfrak{i}), Ad g(\mathfrak{i}'))$  est égal à  $(B_1, Ad x(\mathfrak{i}_1), Ad x(\mathfrak{i}'_1))$ .

 $D\'{e}monstration:$ 

Ecrivons  $\underline{\mathbf{i}} = Ad g(\mathbf{i})$  et  $\underline{\tilde{\mathbf{h}}} = \underline{\mathbf{i}} \cap \mathbf{l}$ , etc. On note  $(B_1, \underline{\mathbf{i}}_1, \underline{\mathbf{i}}_1')$ , l'antécédent de  $(B, Ad g(\mathbf{i}),$ 

 $Ad g(\mathfrak{i}')$ ). On a, grâce à la Proposition 2 :

$$g = n'nx = n'x(x^{-1}nx)$$

Donc:

$$Ad g(i) = Ad n'x(i)$$

puisque  $x^{-1}nx \in N \subset I$ . Comme  $n'x \in (L \cap L')N'_L \subset L$ , cela implique :

$$\underline{\tilde{\mathfrak{h}}} = Ad \ n'x(\tilde{\mathfrak{h}}),$$

où  $\tilde{\mathfrak{h}}=\mathfrak{i}\cap\mathfrak{l}$ . Mais n'x est aussi élément de P'. Alors, on a :

$$\underline{\tilde{\mathfrak{h}}} \cap \mathfrak{p}' = Ad \, n' x (\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$$

D'où l'on déduit :

$$\underline{\mathbf{i}}_1 = p^{\mathfrak{n}'}(Ad \ n'x(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'))$$

Mais il est clair que la restriction de  $p^{\mathfrak{n}'}$  à  $\mathfrak{p}'$ , n'est autre que la projection sur  $\mathfrak{l}'$ , parallélement à  $\mathfrak{n}'$ . Cette restriction entrelace l'action adjointe de P' sur  $\mathfrak{p}'$  avec l'action naturelle de P' sur  $\mathfrak{l}'$ , identifié au quotient de  $\mathfrak{p}'$  par  $\mathfrak{n}'$  (N' agit trivialement). Il en résulte :

$$\underline{\mathfrak{i}}_1 = \operatorname{Ad} x(p^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')) = \operatorname{Ad} x(\mathfrak{i}_1)$$

comme désiré. On traite de manière similaire  $\underline{i}'_1$ .

**Proposition 5** Tout triple de Manin sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$  est conjugué, par un élément de  $P \cap P'$  à un triple de Manin ,  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ , sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , d'antécédent  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  pour lequel il existe une sous-algèbre de Cartan fondamentale  $\tilde{\mathfrak{f}}$  (resp.  $\tilde{\mathfrak{f}}'$ ), de  $\mathfrak{i}$  (resp.  $\mathfrak{i}'$ ), contenue dans  $\mathfrak{i}_1$  (resp.  $\mathfrak{i}'_1$ ). On dit que le triple  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  est lié à son antécédent, avec lien  $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{\mathfrak{f}}')$ .

#### Démonstration :

Démontrons (i). Soit  $(B, \underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{i}}')$  un triple de Manin pour  $\mathfrak{g}$ , sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ . On note  $\underline{\mathfrak{h}} = \underline{\mathbf{i}} \cap \mathfrak{m}$ , etc.. On note  $\underline{\sigma}$  (resp.  $\underline{\sigma}'$ ), l'af-involution de  $\mathfrak{m}$  (resp.  $\mathfrak{m}'$ ) ayant  $\underline{\mathfrak{h}}$  (resp.  $\underline{\mathfrak{h}}'$ ) pour espace de points fixes. On définit de même  $\underline{\mathbf{i}}_{\mathfrak{a}}$ . Comme  $\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{i}}' = \mathfrak{g}$ , on a :

$$\underline{\mathfrak{i}}+\mathfrak{p}'=\mathfrak{g}$$

Appliquant  $p_{\mathfrak{l}}$  à cette égalité, on en déduit :

$$(\underline{\mathfrak{i}}\cap\mathfrak{l})+(\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{l})=\mathfrak{l}$$

On applique encore la projection de  $\mathfrak l$  sur  $\mathfrak m$ , parallèlement à  $\mathfrak a$  pour obtenir :

$$\underline{\mathfrak{h}}+(\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{m})=\mathfrak{m}$$

En conséquence,  $\underline{H}(P'\cap M)^0$  est ouvert dans M. Or  $(P'\cap M)^0$  est le sous groupe parabolique de M, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{m}$ . Par ailleurs  $\sigma$  étant une af-involution,  $\mathfrak{m}$  est le produit d'idéaux  $\mathfrak{m}_j$ , invariants par  $\sigma$  et sur lesquels induit :

soit une conjugaison par rapport à une forme réelle,

soit "l' échange des facteurs " de deux idéaux isomorphes dont  $\mathfrak{m}_j$  est la somme.

Il résulte alors de [M2], [M1], que  $\underline{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$  contient une sous-algèbre de Cartan fondamentale  $\underline{\mathfrak{f}}$  de  $\underline{\mathfrak{h}}$  et une sous-algèbre de Borel,  $\mathfrak{b}$ , de  $\mathfrak{m}$ , contenant  $\underline{\mathfrak{f}}$ , contenue dans  $\mathfrak{p}' \cap \overline{\mathfrak{m}}$ , et telle que :

$$\underline{\sigma}(\underline{\mathfrak{b}}) + \underline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{m} \tag{2.37}$$

D'après le Lemme 11, :

$$\underline{\tilde{\mathfrak{f}}} := \underline{\mathfrak{f}} + \underline{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}}$$

est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de <u>i</u> et le centralisateur dans  $\mathfrak{g}$ , <u>i</u>, de  $\tilde{\mathfrak{f}}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , contenue dans  $\mathfrak{l}$ . De la définition des af-involutions, il résulte que toute sous-algèbre de Cartan de  $\underline{\mathfrak{h}}$  contient des éléments réguliers de  $\mathfrak{m}$ . Il résulte alors de [Bor], Proposition 11.15, que  $\underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{m}$  est contenu dans  $\mathfrak{b}$ . Donc  $\underline{\mathfrak{i}} = (\underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$  est contenu dans  $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$ . C'est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$ , donc elle est conjuguée à  $j_0$ , par un élément du sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$ . Mais, d'après (2.31), on  $\underline{\mathfrak{g}} : \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l})$  et ce sous-groupe analytique est égal à  $(L \cap L')N'_L$ , puisque  $L \cap L'$  est connexe, d'après la Proposition 2. Donc, il existe  $n' \in N'_L$ ,  $x \in L \cap L'$ , tels que

$$Ad \ xn'(\mathbf{j}) = \mathbf{j}_0$$

soit encore:

$$Ad n'(\mathbf{j}) = Ad x^{-1}(\mathbf{j}_0) \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$$
(2.38)

On trouve de même  $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}'$ ,  $\underline{\mathbf{b}}'$ ,  $\underline{\mathbf{b}}'$ ,  $\underline{\mathbf{i}}'$  et  $x' \in L \cap L'$ ,  $n \in N_{L'}$ , vérifiant des propriétés similaires. On pose :

$$u = nn', \ \mathbf{i} = Ad \ u(\mathbf{i}), \ \mathbf{i}' = Ad \ u(\mathbf{i}')$$

Comme n et n' commutent et que  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $\mathfrak{i}$ , on a :

$$Ad \ u(\underline{\mathbf{i}}) = Ad \ n'(\underline{\mathbf{i}})$$

et de même :

$$Ad \ u(\underline{\mathbf{i}}') = Ad \ n(\underline{\mathbf{i}}')$$

On pose alors:

$$\tilde{\mathfrak{f}} = Ad \, n'(\tilde{\mathfrak{f}}), \quad \tilde{\mathfrak{f}}' = Ad \, n(\tilde{\mathfrak{f}}'), \quad \mathfrak{b} = Ad \, n'(\underline{\mathfrak{b}}), \quad \mathfrak{b}' = Ad \, n(\underline{\mathfrak{b}}')$$
 (2.39)

On voit alors que  $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$  est un triple de Manin, conjugué par u à  $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$  et sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ .

On va voir que  $\tilde{\mathfrak{f}}$  a les propriétés voulues. D'abord, comme  $\underline{\tilde{\mathfrak{f}}}$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\underline{\mathfrak{i}}$ , par conjugaison, on en déduit que  $\tilde{\mathfrak{f}}$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i}$ . Le centralisateur,  $\mathfrak{j}$ , de  $\tilde{\mathfrak{f}}$  vérifie

$$j = Ad n'(j) \tag{2.40}$$

donc est contenu dans  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ , d'après (2.38). Alors, d'après le Lemme 11, on a bien  $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a})$ , où  $\mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{h}$ , et  $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}$  est égal à  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ .

On a vu que  $\mathfrak{f}$  est contenu dans  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}'$ , donc dans  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}'$ . De plus  $p^{\mathfrak{n}'}$  est l'identité sur  $\mathfrak{l}'$ . Donc  $\tilde{\mathfrak{f}}$  est contenu dans  $\mathfrak{i}_1$ . Par ailleurs, comme  $\tilde{\mathfrak{f}}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$  (cf. [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.1, Exemple 3), et par

projection , c'est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{i}_1$  (cf. l.c., Corollaire 2 de la Proposition 4).

Il reste à voir que cette sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{i}_1$  est fondamentale.

On suppose que  $\mathfrak{i}_1$  est sous  $\mathfrak{p}_1$ . D'après le Lemme 11 (iv), il existe une unique décompo-

sition de Langlands  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ , telle que  $\mathfrak{l}_1$  contienne  $\tilde{\mathfrak{f}}$ . On note  $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{l}_1^{der}$ . Il suffit de voir que  $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{m}_1$ . Pour cela, il suffit de voir qu'aucune racine de  $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1$  dans  $\mathfrak{m}_1$  n'est réelle. D'après le Lemme 11 (iv),  $\tilde{\mathfrak{f}} = (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1) \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}_1)$ , où  $\mathfrak{a}_1$  est le centre de  $\mathfrak{l}_1$ . Alors, une racine  $\alpha$  de  $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1$  dans  $\mathfrak{m}_1$ , prolongée par zéro sur  $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}_1$  est une racine de  $\tilde{\mathfrak{f}}$  dans  $\mathfrak{m}$ . Mais alors, comme  $\mathfrak{f}$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i}_1$ . On montre de même que  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i}_1$ . On montre de même que  $\tilde{\mathfrak{f}}'$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i}'$  et  $\mathfrak{i}'_1$ . Ceci achève la preuve de la Proposition.

**Théorème 4** Tout triple de Manin réel (resp. complexe) sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$  est conjugué, par un élément de  $P \cap P'$ , à un triple de Manin réel (resp. complexe) sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ ,  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ , dont tous les antécédents successifs,  $(B, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ ,  $(B, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}'_2)$ , ..., sont des triples de Manin standard dans  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{g}_2, \ldots$ , relativement à l'intersection de  $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}'_0$ , avec  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ , et tel que l'intersection  $\mathfrak{f}_0$  (resp.  $\mathfrak{f}'_0$ ) de  $\mathfrak{j}_0$  avec  $\mathfrak{i}$  (resp.  $\mathfrak{i}'$ ) soit une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i}$  (resp.  $\mathfrak{i}'$ ), contenue dans  $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots$  (resp.  $\mathfrak{i}'_1, \mathfrak{i}'_2, \ldots$ ).

Un triple satisfaisant ces propriétés sera appelé triple fortement standard. Le plus petit entier, k, tel que  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{j}_0$ , est appelé la hauteur du triple fortement standard.

Démonstration : On procède par récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}^{der}$ . Si celleci est nulle, le Théorème est clair. Supposons l'assertion démontrée pour les algèbres réductives dont l'idéal dérivé est de dimension strictement inférieure à celle de  $\mathfrak{g}^{der}$ . D'après la Proposition 5, le triple donné est conjugué, par un élément de  $P \cap P'$ , à un triple de Manin  $\mathfrak{T}'$ , sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , lié à son antécédent  $\mathfrak{T}'_1$ . D'après l'hypothèse de récurrence, ce dernier est conjugué par un élément,  $g_1$ , de  $L \cap L'$ , a un triple de Manin fortement standard :  $\underline{\mathfrak{T}}_1 := g_1 \mathfrak{T}'_1$ . Par transport de structure,  $\underline{\mathfrak{T}} = g_1 \mathfrak{T}'$  est lié à son antécédent  $\underline{\mathfrak{T}}_1$ . On note  $\underline{\mathfrak{T}} = (B, \underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{i}}')$ ,  $\underline{\mathfrak{T}}_1 = (B, \underline{\mathbf{i}}_1, \underline{\mathbf{i}}'_1)$ , et  $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$  un lien entre ces triples. Comme  $\underline{\mathfrak{T}}_1$  est fortement standard,  $\mathfrak{f}_1 := \mathfrak{j}_0 \cap \underline{\mathbf{i}}_1$  (resp.  $\mathfrak{f}'_1 := \mathfrak{j}_0 \cap \underline{\mathbf{i}}'_1$ ) est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\underline{\mathbf{i}}_1$  (resp.  $\underline{\mathbf{i}}'_1$ ). Alors  $\mathfrak{f}$  et  $\mathfrak{f}_1$  (resp.  $\mathfrak{f}'_1$ ) sont des sous-algèbre de Cartan fondamentales de  $\underline{\mathbf{i}}_1$  (resp.  $\underline{\mathbf{i}}'_1$ ), donc conjuguées par un élément  $i_1$  de  $\underline{L}_1$  (resp.  $i'_1$  de  $\underline{L}'_1$ ), i.e. :

$$\mathfrak{f}=i_1(\mathfrak{f}_1),\mathfrak{f}'=i_1'(\mathfrak{f}_1')$$

On dispose d'une suite exacte de groupes :

$$0 \to N' \to P' \to L' \to 0$$

où la flèche de P' dans L' est le morphisme dont la différentielle est la restriction de  $p^{\mathfrak{n}'}$  à  $\mathfrak{p}$ . La définition de  $\underline{\mathfrak{i}}_1$  montre que la restriction de ce morphisme à  $(\underline{\tilde{H}}\cap P')^0$  est un morphisme surjectif sur  $\underline{I}_1$ , de noyau contenu dans  $N'_L$ . Comme  $\underline{\tilde{H}}$  est contenu dans  $\underline{I}$ , on en déduit qu'il existe  $n' \in N'_L$  et  $i \in \underline{l}$  tels que :

$$i_1 = n'i$$

De même on trouve  $n \in N_{L'}, i' \in \underline{I'}$  tels que :

$$i_1' = ni'$$

Montrons que le triple de Manin  $\mathfrak{T}=(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$ , défini par  $\mathfrak{T}=n^{-1}n'^{-1}\underline{\mathfrak{T}}$ , convient. D'abord c'est un triple sous  $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')$ , puisque  $n,n'\in P\cap P'$ , conjugué du triple initial. Par ailleurs n et n' commutent (cf. Proposition 2) et N est contenu dans  $\underline{I}$ . Donc, on a :

$$\mathbf{i} = n'^{-1}(\underline{\mathbf{i}}) = n'^{-1}i^{-1}(\underline{\mathbf{i}}) = i_1^{-1}(\underline{\mathbf{i}})$$

Comme  $\mathfrak{f}=i_1(\mathfrak{f}_1)$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\underline{\mathfrak{i}}, i_1^{-1}(\mathfrak{f})=\mathfrak{f}_1$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i},$  par transport de structure. De plus  $\mathfrak{f}_1$  est contenue dans  $\underline{\mathfrak{i}}_1$ . De même  $\mathfrak{f}'_1$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{i}',$  contenue dans  $\underline{\mathfrak{i}}'_1$ . Par ailleurs, comme  $\underline{\mathfrak{T}}_1$  est fortement standard,  $\mathfrak{j}_0$  est la somme directe de  $\mathfrak{f}_1$  et  $\mathfrak{f}'_1$ . Comme  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$  ont une intersection réduite à zéro, il en résulte que  $\mathfrak{f}_1$  (resp.  $\mathfrak{f}'_1$ ) est égal à l'intersection de  $\mathfrak{j}_0$  avec  $\mathfrak{i}$  (resp.  $\mathfrak{i}'$ ). Par ailleurs, d'après la Proposition 4, l'antécédent de  $(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$  est égal à  $\underline{\mathfrak{T}}_1$ . Comme ce dernier est fortement standard, ce qui précède suffit à prouver que  $(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$  l'est aussi.

Remarque 2 Le Théorème 4 réduit la classification des triples de Manin à celle des triples fortement standard.

**Proposition 6** Si deux triples de Manin fortement standard sont conjugués par un élément de G, ils sont de même hauteur. Ceci permet de définir la hauteur d'un triple de Manin comme la hauteur d'un triple fortement standard auquel il est conjugué.

#### Démonstration :

On procède par récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}^{der}$ . Si celle-ci est nulle, la Proposition est vraie. Sinon, d'après la Proposition 2 et la Proposition 4, si deux triples de Manin fortement standard sont conjugués par un élément, leurs antécédents sont conjugués par un élément de  $L \cap L'$ . La Proposition résulte alors immédiatement de l'application de l'hypothèse de récurrence.

Etablissons quelques propriétés des triples fortement standard. On utilisera les deux Lemmes suivant.

**Lemme 13** Soit B une forme de Manin  $\mathbb{C}$ -bilinéaire. Soit  $\mathfrak{i}$  une sous-algèbre Lagrangienne complexe sous  $\mathfrak{p}$ . Soit  $\alpha$  un poids non nul de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{g}$ , tel que  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  soit contenu dans  $\mathfrak{i}$ . Alors  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{n}$ .

Démonstration : On emploie les notations du Théorème 1. On note  $\mathfrak{f}=\mathfrak{j}_0\cap\mathfrak{h}$ . On sait que si  $\beta$  est une racine de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{m}$ ,  $\sigma(\mathfrak{m}^{\beta})=\mathfrak{m}^{\beta'}$ , avec  $\beta'\neq\beta$  (cf. Lemme 5, pour les f-involutions). De plus si  $\beta_{|\mathfrak{f}}=\gamma_{|\mathfrak{f}}$ , pour un autre poids de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{m}$ , on a  $\beta$  égal à  $\gamma$  ou  $\gamma'$ . On note :

$$\mathfrak{h}_{\beta} := \{ X + \sigma(X) | X \in \mathfrak{m}^{\beta} \}$$

Soit  $R_*$  un sous-ensemble de l'ensemble R, des poids non nuls de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{m}$ , tel que  $R_*$  et  $\{\beta'|\beta\in R_*\}$  forme une partition de R. Alors, on a :

$$\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{f} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}) \oplus (\oplus_{\beta \in R_*} \mathfrak{h}_{\beta}) \tag{2.41}$$

qui est une décomposition en somme directe de représentations de  $\mathfrak f$  qui sont deux à deux sans sous-quotients simples isomorphes, toutes étant irréductibles, sauf peut-être la première. Si  $\alpha$  n'est pas un poids de  $\mathfrak j_0$  dans  $\mathfrak n$ , comme il est non nul, c'est un poids de  $\mathfrak j_0$  dans  $\mathfrak m$ . En étudiant l'action de  $\mathfrak f$ , on est conduit à :

$$\mathfrak{g}^{\alpha}\subset\mathfrak{h}_{\alpha}$$

Comme  $\alpha \neq \alpha'$ , c'est impossible. Une contradiction qui achève de prouver le Lemme.

**Lemme 14** Soit  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  un triple de Manin complexe fortement standard, et soit  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  son antécédent, que l'on suppose sous  $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1)$ . On note  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$  la décomposition de Langlands de  $\mathfrak{p}_1$  telle que  $\mathfrak{l}_1$  contienne  $\mathfrak{j}_0$  et on note  $\mathfrak{m}_1$  l'idéal dérivé de  $\mathfrak{l}_1$ .

Alors  $\mathfrak{m}_1$  est égal à l'idéal dérivé de  $(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}')$  et l'involution,  $\sigma_1$ , de  $\mathfrak{m}_1$ , dont  $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{m}_1$  est l'ensemble des points fixes, est égale à la restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_1$ .

#### Démonstration :

On réutilise les notations du Lemme précédent. Etudiant la décomposition en représen-

tations irréductibles sous  $\mathfrak{f}$ , de  $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ , et utilisant (2.41), on voit que :

$$ilde{\mathfrak{h}}\cap\mathfrak{p}'=(\mathfrak{f}+\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}})\oplus(\oplus_{eta\in R_*,\mathfrak{h}_eta\subset\mathfrak{p}'}\mathfrak{h}_eta)$$

Mais  $\mathfrak{h}_{\beta} \subset \mathfrak{p}'$  si et seulement si  $\mathfrak{g}^{\beta}$  et  $\mathfrak{g}^{\beta'}$  sont contenus dans  $\mathfrak{p}'$ . Si  $\beta$  satisfait cette condition on a :

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_{\beta}) = \mathfrak{g}^{\beta} \ si \ \mathfrak{g}^{\beta} \subset \mathfrak{m}' \ et \ \mathfrak{g}^{\beta} \subset \mathfrak{n}'$$
$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_{\beta}) = \mathfrak{h}_{\beta} \ si \ \mathfrak{g}^{\beta}, \mathfrak{g}^{\beta'} \subset \mathfrak{m}'$$

Notons, pour V sous-espace vectoriel complexe de  $\mathfrak{g}$ , invariant sous  $\mathfrak{j}_0$ ,  $\Delta(V,\mathfrak{j}_0)$ , l'ensemble des poids non nuls de  $\mathfrak{j}_0$  dans V. Alors on a :

$$\dot{\mathfrak{i}}_1 = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}_1 \oplus \dot{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}} \tag{2.42}$$

où:

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{f} \oplus_{\beta \in R_* \cap \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}_0), \, \beta' \in R_* \cap \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}_0)} \, \mathfrak{h}_{\beta}$$
 (2.43)

et

$$\mathfrak{v}_1 = \bigoplus_{\beta \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}_0), \, \beta' \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}', \mathfrak{j}_0)} \mathfrak{g}^{\beta} \tag{2.44}$$

On remarque que:

$$\mathfrak{u}_1 = ((\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}'))^{\sigma} \tag{2.45}$$

Donc  $\mathfrak{u}_1$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}'$ , réductive, dont le centre est contenu dans  $\mathfrak{f}$ . Notons  $\mathfrak{w}_1 = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}') + \mathfrak{j}_0$ . On voit que  $\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{v}_1$  est une une sous-algèbre parabolique, de  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ , dont le radical nilpotent est  $\mathfrak{v}_1$ , et la décomposition ci-dessus est une décomposition de Langlands de  $\mathfrak{q}_1$  avec  $\mathfrak{j}_0$  contenu dans  $\mathfrak{w}_1$ .

Par ailleurs  $\mathfrak{i}_1$  est contenue dans  $\mathfrak{q}_1$ , d'après (2.42), (2.43) et (2.44), Tenant compte du fait que, pour  $\beta \in R$ ,  $[\mathfrak{f},\mathfrak{m}^{\beta}] = \mathfrak{m}^{\beta}$ , d'après la définition de  $\mathfrak{f}$  et des f-involutions, on déduit de (1.3) que le radical nilpotent de  $\mathfrak{i}_1$  contient  $\mathfrak{v}_1$ . Par ailleurs, comme le centre de  $\mathfrak{u}_1$  est contenu dans  $\mathfrak{j}_0$ , le radical et, a fortiori, le radical nilpotent de  $\mathfrak{i}_1$  est contenu dans  $\mathfrak{j}_0 \oplus \mathfrak{v}_1$ . Mais ce radical nilpotent ne rencontre pas  $\mathfrak{j}_0$  (cf. Théorème 1), donc il est égal à  $\mathfrak{v}_1$ . Alors  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$ ,  $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{w}_1$ . Donc  $\mathfrak{m}_1$  a la forme annoncée. Comme  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{m}_1$ , on déduit de (2.45) que  $\sigma_1$  a la forme annoncée.

# 3 Classification des triples de Manin complexes

Dans toute cette partie triple de Manin voudra dire triple de Manin complexe. On rappelle qu'on a fixé  $\mathfrak{j}_0$  et  $\mathfrak{b}_0$ ,  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}'$ . On définit :

$$\mathbb{C}^+ := \{\lambda \in \mathbb{C}^* | Re \ \lambda < 0, \ ou \ Re \ \lambda = 0 \ et \ Im \ \lambda > 0\}, \ \mathbb{C}^- = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^+$$

Si B est une forme de Manin complexe sur  $\mathfrak{g}$ , on note  $\mathfrak{g}_+$  (resp.  $\mathfrak{g}_-$ ) la somme de ses idéaux simples,  $\mathfrak{g}_i$ , pour lesquels la restriction de B à  $\mathfrak{g}_i$  est égal à  $K_{\lambda_i}^{\mathfrak{g}_i}$ , avec  $\lambda_i \in \mathbb{C}^+$  (resp.  $\mathbb{C}^-$ ).

**Lemme 15** Aucune sous-algèbre de Lie semi-simple complexe de  $\mathfrak{g}_+$  (resp.  $\mathfrak{g}_-$ ) n'est isotrope pour B.)

On fait la démontration pour  $\mathfrak{g}_+$ , celle pour  $\mathfrak{g}_-$  étant identique. Soit  $\mathfrak{s}$  une sous algèbre de Lie semi-simple complexe de  $\mathfrak{g}_+$ . On note  $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$  une forme réelle compacte de  $\mathfrak{s}$ . Alors  $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$  est contenu dans une forme réele compacte de  $\mathfrak{g}_+$ .

En effet, le sous-groupe analytique de  $G_+$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$  est compact, comme groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie semi-simple compacte. Il est donc contenu dans un sous-groupe compact maximal K de  $G_+$ , et son algèbre de Lie,  $\mathfrak{k}$ , convient. On note  $\mathfrak{g}_i$ ,  $i = 1, \ldots, p$ , les idéaux simples de  $\mathfrak{g}_+$ . Alors  $\mathfrak{k} = \oplus_{i=1,\ldots,p}\mathfrak{k}_i$ , où  $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_i$ . Le Lemme résultera de la preuve de :

$$B(X,X) \neq 0, \ X \in \mathfrak{k} \setminus \{0\} \tag{3.1}$$

Pour cela on remarque que:

$$\sum_{i=1,\dots,p} \lambda_i x_i \neq 0, \ si, pour \ i=1,\dots,p, \ \lambda_i \in \mathbb{C}^+ \ et \ x_i \geq 0, \ non \ tous \ nuls \ (3.2)$$

Maintenant, si  $X \in \mathfrak{k} \setminus \{0\}$  et  $X = \sum_{i=1,\dots,p} X_i$ , où  $X_i \in \mathfrak{k}_i$ ,  $K_{\mathfrak{g}_i}(X_i, X_i)$  est négatif où nul, et non nul pour au moins un indice i. Alors (3.1), et donc le Lemme, résulte de (3.2) et de la définition de  $\mathfrak{g}_+$ .

**Lemme 16** Soit  $\mathfrak{i}$  une sous-algèbre Lagrangienne sous  $\mathfrak{p}$ . On note  $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}_+ = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_+$ ,  $\mathfrak{m}_- = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_-$ .

On a  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$ . Par ailleurs la f-involution,  $\sigma$ , dont  $\mathfrak{h}$  est l'espace des points fixes, induit un morphisme bijectif,  $\tau$ , entre  $\mathfrak{m}_+$  et  $\mathfrak{m}_-$  tel que :

$$B(\tau(X), \tau(X)) = -B(X, X), X \in \mathfrak{m}_+$$

 $D\acute{e}monstration:$  L'involution  $\sigma$  permute, sans point fixe, d'après le Lemme 5, les idéaux simples de  $\mathfrak{m}$ . Ceux ci sont contenus dans des idéaux simples de  $\mathfrak{g}$ , donc contenus soit dans  $\mathfrak{m}_+$ , soit dans  $\mathfrak{m}_-$ . Donc  $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_+\oplus\mathfrak{m}_-$ . Si  $\sigma$  envoyait un idéal simple de  $\mathfrak{m}_+$  dans un autre idéal de  $\mathfrak{m}_+$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{m}_+$ , donc aussi  $\mathfrak{g}_+$ , contiendrait une sous-algèbre semi-simple complexe isotrope. C'est impossible, d'après le Lemme précédent. Donc  $\sigma$  envoie tout idéal simple de  $\mathfrak{m}_+$  dans  $\mathfrak{m}_-$ . Le Lemme en résulte immédiatement.  $\square$ 

### Notations

On notera  $j_+ = j_0 \cap g_+$ ,  $a_+ = a \cap j_+$ . on définit de même  $j_-$  et  $a_-$ . La restriction de  $j_0$  à  $j_+$  identifie les racines de  $j_0$  dans  $g_+$  à celles de  $j_+$ . On note  $\tilde{R}_+$  l'ensemble de celles-ci ,  $\Sigma_+$ , l'ensemble des racines simples de l'ensemble de racines positives,  $\tilde{R}_+^+$ , de  $\tilde{R}_+$ , formé des éléments de  $\tilde{R}_+$  qui sont des poids de  $j_+$  dans  $b_0 \cap g_+$ . On définit de même  $\tilde{R}_-$ , relativement à  $g_-$  et  $j_-$ .

On définit aussi  $\Sigma_-$ , l'ensemble des racines simples de l'ensemble de racines positives,  $\tilde{R}_-^+$ , de  $\tilde{R}_-$ , formé des éléments de  $\tilde{R}_-$  qui sont des poids de  $j_-$  dans  $\mathfrak{b}_0' \cap \mathfrak{g}_-$ .

On définit, pour i comme dans le Lemme précédent,  $R_+$ , l'ensemble des racines de  $\mathfrak{j}_+$  dans  $\mathfrak{m}_+$ ,  $\Gamma_+ = \Sigma_+ \cap R_+$ .

Puis on définit comme ci-dessus  $R_-$  et  $\Gamma_-$ .

La restriction de  $\tau$  à  $\mathfrak{a}^+ := \mathfrak{m}_+ \cap \mathfrak{j}_0$  définit une bijection entre  $\mathfrak{a}^+$  et  $\mathfrak{a}^- := \mathfrak{m}_- \cap \mathfrak{j}_0$ , dont l'inverse de la transposée induit une bijection, notée A, ente  $R_+$  et  $R_-$ . On notera, pour  $\alpha \in R_+$ ,  $A\alpha$ , au lieu de  $A(\alpha)$ .

Soit  $\alpha \in \tilde{R}$ . On note  $H_{\alpha}$  l'élément de  $\mathfrak{j}_0$ , tel que  $\alpha(H_{\alpha})=2$  et qui est orthogonal au noyau de  $\alpha$  pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\alpha \in R_+$  et  $\beta = A\alpha$ . Alors, on voit facilement que  $H_{\alpha}$  (resp.  $H_{\beta}$ ) est élément de  $\mathfrak{a}^+$  (resp.  $\mathfrak{a}^-$ ). Comme  $\tau$  transporte la forme de Killing de  $\mathfrak{m}_+$  sur celle de  $\mathfrak{m}_-$ , et que celles-ci sont proportionnelles à la restriction de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ , on a :

$$\tau(H_{\alpha}) = H_{\beta}$$

Le Lemme 15 implique donc :

$$B(H_{A\alpha}, H_{A\beta}) = -B(H_{\alpha}, H_{\beta}), \ \alpha, \beta \in \Gamma_{+}$$
(3.3)

Soit  $\mathfrak{i}'$  une autre sous-algèbre Lagrangienne de  $\mathfrak{g}$ , pour laquelle on introduit des objets similaires, notés avec des '.

On notera C, ou parfois " $A^{-1}A'$ ", l'application définie sur la partie, éventuellement vide :

$$dom C := \{ \alpha \in R'_{+} | A'\alpha \in R_{-} \}$$

$$(3.4)$$

par:

$$C\alpha = A^{-1}A'\alpha, \ \alpha \in dom C$$
 (3.5)

l'image de C étant égale à :

$$Im C = \{ \alpha \in R_+ | A\alpha \in R'_- \}$$

$$(3.6)$$

**Lemme 17** Soit (B, i, i'), un triple fortement standard. Avec les notations précédentes, pour tout  $\alpha \in dom C$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\alpha, \dots, C^{n-1}\alpha \in dom \ C \ et \ C^n\alpha \notin dom \ C$$

 $D\acute{e}monstration:$  Soit  $\alpha \in dom\ C$ . Supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C^n\alpha$  soit défini et élément de  $dom\ C$ . Comme  $R'_+$  est un ensemble fini, il existe  $n_1, n'_1 \in \mathbb{N}^*$ , distincts, tels que  $C^{n_1}\alpha = C^{n'-1}\alpha$ . D'où l'on déduit l'existence de  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $C^n\alpha = \alpha$ . On note:

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = C\alpha, \dots, \alpha_n = C^{n-1}\alpha$$

Montrons que :

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset R_+ \cap R'_+, \ A(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = A'(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$$
 (3.7)

En effet, pour tout i,  $\alpha_i$  est élément de  $dom\ C \cap Im\ C$ , ce qui implique la première inclusion. Par ailleurs, pour  $i = 1, \ldots, n-1$ , comme " $A^{-1}A'$ "  $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ , on a :

$$A'\alpha_i = A\alpha_{i+1}, \ i = 1, \dots, n-1$$

Maintenant, comme " $A^{-1}A'$ "  $\alpha_n = \alpha_1$ , on a aussi

$$A'_{\alpha_n} = A_{\alpha_1}$$

Ceci achève de prouver (3.7).

On note  $R_+^0$  (resp.  $R_-^0$ ), l'intersection de  $R_+$  (resp.  $R_-$ ) avec le sous-espace vectoriel réel,  $V_0$ , de  $\mathfrak{j}_0^*$ , engendré par les  $\alpha_i$  (resp.  $A\alpha_i$ ),  $i=1,\ldots,n$ . L'identification de  $\mathfrak{j}_0$  à  $\mathfrak{j}_0^*$ , à l'aide de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ , fait apparaître  $(V_0)_{\mathbb{C}}$  comme (le dual d') un sous-espace vectoriel complexe  $\mathfrak{a}_0^+$  de  $\mathfrak{a}^+$ . On définit de même  $\mathfrak{a}_0^-$ . On note  $\mathfrak{m}_+^0$  (resp.  $\mathfrak{m}_-^0$ ) la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les espaces radiciels  $\mathfrak{m}_+^{\alpha}$ ,  $\alpha \in R_+^0$  (resp.  $\mathfrak{m}_-^{\alpha}$ ,  $\alpha \in R_-^0$ ). On voit immédiatement que  $\mathfrak{m}_+^0$  est semi-simple et que :

$$\mathfrak{m}_+^0=(\oplus_{lpha\in R_0^+}\mathfrak{m}_+^lpha)\oplus\mathfrak{a}_0^+$$

car  $R_+^0$  est un système de racines dans  $\mathfrak{a}_0^+$  ([Bou], Ch. 7, Par. 1, Proposition 4). Il en va de même pour  $\mathfrak{m}_-^0$ . Alors  $\tau$  et  $\tau'$  induisent un isomorphisme entre  $\mathfrak{m}_+^0$  et  $\mathfrak{m}_-^0$ . Donc  $\tau'^{-1}\tau$  induit un automorphisme de  $\mathfrak{m}_0^+$ , qui a donc un point fixe non nul X. Alors, on a :

$$\tau(X) = \tau'(X)$$
 et  $X + \tau(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$ 

Une contradiction qui achève de prouver la propriété voulue pour C.

**Proposition 7** Soit (B, i, i'), un triple fortement standard.

Alors, pour tout  $\alpha \in R_+$  (resp.  $R'_+$ ),  $\alpha$  et  $A\alpha$  (resp.  $A'\alpha$ ), sont de même signes (relativement aux ensembles de racines positives  $\tilde{R}^+_+$ ,  $\tilde{R}^+_-$ , définis plus haut)

D'ebut de la démonstration : On raisonne par récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}^{der}$ . Si celle-ci est nulle, le résultat est clair. On suppose maintenant que celle-ci n'est pas nulle, et que la Proposition est vraie pour les algèbres réductives dont l'idéal dérivé est de dimension strictement inférieure à celle de  $\mathfrak{g}^{der}$ . Nous allons commencer par établir plusieurs Lemmes.

Lemme 18 Avec les notations précédentes, on a :

- (i) Si  $\alpha \in R_+$  et  $\alpha \notin Im C$ ,  $\alpha$  et  $A\alpha$  sont de mêmes signes.
- (ii) Si  $\alpha \in R'_+$ , et  $\alpha \notin Dom C$ ,  $\alpha$  et  $A'\alpha$  sont de même signes.

 $D\acute{e}monstration$ : Montrons (i). Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $\alpha$  et  $\beta := A\alpha$  soient de signes opposés. L'hypothèse sur  $\alpha$  équivaut à :

$$\alpha \in R_+, \ A\alpha \notin R'_-$$
 (3.8)

Quitte à changer  $\alpha$  en  $-\alpha$ , on peut supposer  $\alpha$  positive. Soit X un élément non nul de  $\mathfrak{m}_+^{-\alpha} \subset \mathfrak{b}_0'$ . Alors  $\tau(X) \in \mathfrak{m}_-^{-\beta} \subset \mathfrak{b}_0'$ , d'après notre hypothèse sur  $\alpha$ , et la définition des ensembles de racines positives,  $\tilde{R}_+^+$ ,  $\tilde{R}_-^+$ . Enfin  $Y := X + \tau(X)$  est un élément non nul de  $\mathfrak{h}$ .

Comme  $\mathfrak{m}_{-}^{-\dot{\beta}}\subset \mathfrak{b}_{0}'$  et que  $-\beta=-A\alpha\notin R'_{-}$ , on a  $\mathfrak{m}_{-}^{-\beta}\subset \mathfrak{n}'$ .

Supposons d'abord  $\alpha \notin R'_+$ . Comme  $\alpha$  est positive,  $\mathfrak{m}_+^{-\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{b}'_0$ 

et  $\alpha \notin R'_+$ , implique, comme ci-dessus, que  $\mathfrak{m}_+^{-\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{n}'$ . Alors  $X + \tau(X)$  est un élément non nul de de  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}' \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$ . Une contradiction qui montre qu'on doit avoir  $\alpha \in R'_+$ .

Alors  $X \in \mathfrak{m}'$ ,  $\tau(X) \in \mathfrak{n}'$ ,  $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}'$  et  $p^{\mathfrak{n}'}(Y) = X$ . Donc  $\mathfrak{m}_{+}^{-\alpha} = \mathfrak{g}^{-\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{i}_1$ , où  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  est le triple antécédent de  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ . Appliquant le Lemme 13 à  $\mathfrak{i}_1$ , on voit qu'alors  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{n}_1$ . Mais comme le triple  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  est fortement standard les poids de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{n}_1$  doivent être des poids de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{b}_0$ , ce qui n'est pas le cas de  $-\alpha$ . Ceci achève de prouver (i). Pour (ii), l'hypothèse se traduit par une condition analogue à (3.8), en échangeant le rôle de  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$ . On déduit donc (ii) de (i).

**Lemme 19** Si  $\xi \in R_+ \cap Im C$ , il existe  $\alpha \in dom C$ ,  $\alpha \notin Im C$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que:

$$\alpha, C\alpha, \dots C^{n-1}\alpha \in dom C, \ et \ C^n \notin dom C$$

et vérifiant :

$$\xi = C^i \alpha$$
, pour un  $i \in \{1, \dots, n\}$ 

#### Démonstration :

Comme C est une bijection de  $dom\ C$  sur  $Im\ C$ , car A et A' sont injectives, on note  $C^{-1}$  la bijection réciproque. Echangeant le rôle de  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$  dans le Lemme 17, on voit qu'il existe  $n' \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\xi, C^{-1}\xi, \dots, (C^{-1})^{n'-1}\xi \in Im C, (C^{-1})^{n'}\xi \notin Im C$$

On pose  $\alpha = (C^{-1})^{n'} \xi \in dom C$ . On a aussi  $\alpha \notin Im C$ . On choisit, grâce au Lemme 17,  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\alpha, C\alpha, \dots C^{n-1}\alpha \in dom C, \ et \ C^n\alpha \notin dom C$$

Alors  $\alpha$  et n ont clairement les propriétés voulues.

**Lemme 20** Soit  $\alpha \in R_+ \cap R_-$  tel que  $A\alpha \in R_- \cap R'_-$  (resp.  $A'\alpha \in R_- \cap R'_-$ ). Alors  $\alpha$  et  $A\alpha$  (resp.  $A'\alpha$ ) sont de même signe.

#### Démonstration :

Prouvons l'assertion sur  $A\alpha$  et soit  $\alpha$  comme dans l'énoncé. Soit  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ . Les hypothèses impliquent que  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  et  $\mathfrak{g}^{A\alpha}$  sont contenus dans  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'$ . Donc, on a :

$$\mathfrak{g}^{\alpha}\subset (\mathfrak{m}\cap\mathfrak{m}')\cap\sigma(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{m}')$$

et d'après le Lemme 14, on a  $\mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{m}_1$ . De plus, d'après ce même Lemme, l'involution  $\sigma_1$  est la restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_1$ . On va appliquer l'hypothèse de récurrence du début de la démonstration de la Proposition 7. Pour cela on remarque  $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}')_+ = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \cap \mathfrak{g}_+$  et de même pour  $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}')_-$ . Donc les racines de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$  qui sont positives dans  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$  sont positives dans  $\mathfrak{g}$ . L'application de l'hypothèse de récurrence montre alors que  $\alpha$  et  $A\alpha$  sont de même signe.

Ceci achève de prouver (i). Alors l'assertion sur  $A'\alpha$  résulte de celle sur  $A\alpha$ , par échange du rôle de  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$ 

#### Lemme 21

- (i) Soit  $\alpha \in R_+ \cap Im C$ ,  $\alpha \notin R'_+$ . Alors  $\alpha$  et  $A\alpha$  sont de même signe.
- (ii) Soit  $\alpha \in R'_+ \cap dom C$ ,  $\alpha \notin R_+$ . Alors  $\alpha$  et  $A'\alpha$  sont de même signe.

#### Démonstration :

Démontrons (i). Soit  $\alpha$  comme dans l'énoncé. Quitte à changer  $\alpha$  en  $-\alpha$ , on peut supposer que  $\alpha$  est négative. Raisonnons par l'absurde et supposons  $A\alpha$  positive. Soit  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ . Nos hypothèses montrent que  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{n}'$ . Par ailleurs, écrivant  $\alpha = A^{-1}A'''\beta$ , où  $\beta \in dom C$ , on a  $A\alpha = A'\beta \in R'$ . Donc  $\mathfrak{g}^{A\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{m}'$ . Alors:

$$X + \sigma(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}', \ p^{\mathfrak{n}'}(X + \sigma(X)) = \sigma(X)$$

Il en résulte que  $\mathfrak{g}^{A\alpha}$  est contenu dans  $\mathfrak{i}_1$ , donc dans  $\mathfrak{n}_1$ , d'après le Lemme 13. Alors  $\mathfrak{g}^{A\alpha}$  doit être contenu dans  $\mathfrak{b}_0$ , puisque le triple  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  est standard. Mais, comme  $A\alpha \in R_-$  et est positive, ce n'est pas le cas. Une contradiction qui achève de prouver (i). (ii) se déduit de (i) par l'échange de  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$ .  $\square$  Fin de la démonstration de la Proposition 7:

Soit  $\alpha \in R_+$  et montrons que  $A\alpha$  est de même signe que  $\alpha$ . Distinguons 3 cas

- 1) Si  $\alpha \notin Im C$ , cela résulte du Lemme 18.
- 2) Si  $\alpha \in Im C$  et  $\alpha \notin R'_+$ , cela résulte du Lemme précédent.
- 3) Si  $\alpha \in Im \ C$  et  $\alpha \in R'_+$ , on écrit  $\alpha = A^{-1}A'''\beta$ , où  $\beta \in dom \ C$ . Alors on a  $A\alpha = A'\beta \in R_- \cap R'_-$ . On conclut grâce au Lemme 20.

On vient donc de montrer que pour tout  $\alpha \in R_+$ ,  $\alpha$  et  $A\alpha$  sont de même signe.

On démontre un énoncé similaire pour A' en échangeant le rôle de  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$ . Ceci achève la démonstration de la Proposition.

On rappelle que  $H_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \tilde{R}$  a été défini avant (3.3). C'est la coracine correspondant à  $\alpha$ . On rappelle qu'un système de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}^{der}$  est une famille  $\mathcal{W} = (H_{\alpha}, X_{\alpha}, Y_{\alpha})_{\alpha \in \Sigma}$ , où  $\Sigma = \Sigma_{+} \cup \Sigma_{-}$ , telle que, pour tout  $\alpha, \beta \in \Sigma$ , on ait :

$$[X_{\alpha}, Y_{\beta}] = \delta_{\alpha\beta} H_{\beta} \tag{3.9}$$

$$[H_{\alpha}, X_{\beta}] = N_{\alpha\beta} X_{\beta} \tag{3.10}$$

$$[H_{\alpha}, Y_{\beta}] = -N_{\alpha\beta}Y_{\beta} \tag{3.11}$$

où:

$$N_{\alpha\beta} = \beta(H_{\alpha}) = 2K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\beta}) / K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\alpha})$$
(3.12)

On a alors:

$$N_{\alpha\beta} \in -\mathbb{N}, \ si \ \alpha \neq \beta$$

et:

$$adX_{\alpha}^{1-N_{\alpha\beta}}X_{\beta} = adY_{\alpha}^{1-N_{\alpha\beta}}Y_{\beta} = 0, \quad si \quad \alpha \neq \beta$$
(3.13)

Un tel système existe et on obtient les autres par conjugaison par les éléments de  $J_0$ .

**Définition 5** On appelle donnée de Belavin-Drinfeld généralisée, relativement à B, la donnée de

 $(A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}), où$ :

1) A est une bijection d'une partie  $\Gamma_+$  de  $\Sigma_+$  sur une partie  $\Gamma_-$  de  $\Sigma_-$ , telle que :

$$B(H_{A\alpha}, H_{A\beta}) = -B(H_{\alpha}, H_{\beta}), \ \alpha, \beta \in \Gamma_{+}$$
 (3.14)

2) A' est une bijection d'une partie  $\Gamma'_+$  de  $\Sigma_+$  sur une partie  $\Gamma'_-$  de  $\Sigma_-$ , telle que :

$$B(H_{A'\alpha}, H_{A'\beta}) = -B(H_{\alpha}, H_{\beta}), \ \alpha, \beta \in \Gamma'_{+}$$
(3.15)

3) On définit C="  $A^{-1}A'$ " comme dans (3.4), (3.5). Alors C satisfait la "condition de sortie" :

Pour tout  $\alpha \in dom C$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\alpha, \dots, C^{n-1}\alpha \in dom C$  et  $C^n\alpha \notin dom C$ .

- 4)  $i_{\mathfrak{a}}$  (resp.  $i_{\mathfrak{a}'}$ ) est un sous-espace vectoriel complexe de  $\mathfrak{j}_0$ , contenu et Lagrangien dans l'orthogonal,  $\mathfrak{a}$  (resp.  $\mathfrak{a}'$ ) pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  (ou pour B), à l'espace engendré par les  $H_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  (resp.  $\Gamma' := \Gamma'_+ \cup \Gamma'_-$ ).
- 5) Notons  $\mathfrak{f}$  le sous-espace de  $\mathfrak{j}_0$  engendré par la famille  $H_{\alpha} + H_{A\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_+$ . On définit de même  $\mathfrak{f}'$ . Alors :

$$(\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}) \cap (\mathfrak{f}' \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}) = \{0\} \tag{3.16}$$

On notera alors  $R_+$  le sous-système de racines de  $\tilde{R}$  formé des éléments de  $\tilde{R}$  qui sont combinaison linéaire d'éléments de  $\Gamma_+$ . On définit de même  $R_-$ ,  $R'_+$ ,  $R'_-$ . On notera encore A (resp. A') le prolongement par  $\mathbb{R}$ -linéarité de A (resp. A'), qui définit une bijection de  $R_+$  sur  $R_-$  (resp.  $R'_+$  sur  $R'_-$ ).

**Lemme 22** Si A vérifie la condition 1) ci dessus, il existe un unique isomorphisme,  $\tau$ , de la sous-algèbre  $\mathfrak{m}_+$  de  $\mathfrak{g}$ , engendrée par les  $X_{\alpha}$ ,  $H_{\alpha}$ ,  $Y_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_+$ , sur la sous-algèbre  $\mathfrak{m}_-$  de  $\mathfrak{g}$ , engendrée par les  $X_{\alpha}$ ,  $H_{\alpha}$ ,  $Y_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_-$ , tel que :

$$\tau(H_{\alpha}) = H_{A\alpha}, \tau(X_{\alpha}) = X_{A\alpha}, \tau(Y_{\alpha}) = Y_{A\alpha}, \alpha \in \Gamma^{+}$$

En effet  $\mathfrak{m}_+$  et  $\mathfrak{m}_-$ sont semi-simples et les familles données sont des systèmes de généra-

teurs de Weyl de ces algèbres. Alors, d'après [Bou], Chapitre VIII, Paragraphe 4.3, Théorème 1, il suffit, pour montrer le Lemme, de voir que les relations, du type (3.9) à (3.13), satisfaites par ces générateurs se correspondent, c'est à dire qu'il faut montrer :

$$\alpha(H_{\beta}) = A\alpha(H_{A\beta}), \ \alpha, \beta \in \Gamma_{+}$$
 (3.17)

Montrons d'abord que, la deuxième définition de  $N_{\alpha\beta}$  (deuxième égalité de (3.12)), on peut remplacer  $K_{\mathfrak{g}}$  par n'importe qu'elle autre forme  $\mathfrak{g}$ -invariante non dégénérée. En effet si  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  n'est pas dans le même idéal simple que  $\mathfrak{g}^{\beta}$ ,  $B(H_{\alpha}, H_{\beta}) = K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\beta}) = 0$ . Sinon B et  $K_{\mathfrak{g}}$  sont proportionnelles sur l'idéal simple contenant  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  et  $\mathfrak{g}^{\beta}$ . D'où notre assertion. Alors (3.17) résulte immédiatement de la condition 1).

Proposition 8 Soit  $\mathcal{BD} = (A, A', i_{\mathfrak{a}}, i_{\mathfrak{a}'})$  une donnée de Belavin-Drinfeld généralisée, relative à B. On note  $\mathfrak{p}$  la sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , contenant  $\mathfrak{b}_0$  et  $\mathfrak{m}$ . Sa décomposition de Langlands  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ , où  $\mathfrak{l}$  contient  $\mathfrak{j}_0$ , vérifie  $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ . On utilise les notations du Lemme précédent. On note  $\mathfrak{i} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ , où  $\mathfrak{h} := \{X + \tau(X) | X \in \mathfrak{m}_+\}$ . On définit de même  $\mathfrak{i}'$ . Alors  $(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$  est un triple de Manin fortement standard. On dira que ce triple de Manin est associé à la donnée de Belavin-Drinfeld généralisée,  $\mathfrak{BD}$ , et au système de générateurs de Weyl,  $\mathfrak{W}$ . On le notera  $\mathfrak{T}_{\mathfrak{BD},\mathfrak{W}}$ . On note  $\mathfrak{W}_1 = (H_{\alpha}, X_{\alpha}, Y_{\alpha})_{\alpha \in \Gamma \cap \Gamma'}$ . C'est un système de générateurs de Weyl de  $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}')^{der}$ . Notons  $\Gamma_{1+} = \Gamma_{+} \cap \Gamma'_{+} \cap A^{-1}(\Gamma_{-} \cap \Gamma'_{-})$ . On note  $A_1$  la restriction de A à  $\Gamma_{1+}$  et  $\Gamma_{1-}$  son image. On définit de même  $A'_1$ . On note  $\mathfrak{a}_1$  l'intersection des noyaux des éléments de  $\Gamma_{1+} \cup \Gamma_{1-}$  et on note  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{t}_1$ , où  $\mathfrak{t}_1$  est l'intersection de  $\mathfrak{f}$  avec  $\mathfrak{a}_1$ . On définit de même  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1'}$ . Alors  $(A_1, A'_1, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1'})$  est une donnée de Belavin-Drinfeld généralisée,  $\mathfrak{BD}_1$ , pour  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$  et l'antécédent du triple  $\mathfrak{I}_{\mathfrak{BD},\mathfrak{W}}$  est égal à  $\mathfrak{I}_{\mathfrak{BD},\mathfrak{W}}$ .

## Démonstration :

On procède par récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}^{der}$ . Si celle-ci est nulle, le résultat est clair. On suppose le résultat est vrai pour les algèbres réductives dont l'idéal dérivé est de dimension strictement inférieure à celle de  $\mathfrak{g}^{der}$ . Montrons que  $\mathfrak{h}$  est isotrope pour B. Etudions la forme bilinéaire, B', sur  $\mathfrak{m}_+$ , définie par :

$$B'(X,Y) = -B(\tau(X),\tau(Y)), \ X,Y \in \mathfrak{m}_+$$

C'est clairement une forme bilinéaire invariante sur  $\mathfrak{m}_+$ , qui coincide sur  $\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_+$  avec la restriction de B à  $\mathfrak{m}_+$ , d'après (3.14) et le Lemme 22. Comme  $\mathfrak{a}^+$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{m}_+$ , le Lemme 1 permet de voir que B' coincide sur  $\mathfrak{m}_+$  avec cette restriction. Comme  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_-$  sont orthogonaux pour B, il en résulte que  $\mathfrak{h}$  est isotrope. Par ailleurs, la définition de  $\mathfrak{h}$  montre que c'est l'espace des points fixes d'une f-involution,  $\sigma$ , de  $\mathfrak{m}$ , dont la restriction à  $\mathfrak{m}_+$  est égale à  $\tau$ . En particulier  $\sigma$  permute  $\mathfrak{m}_+$  et  $\mathfrak{m}_-$ . L'application du Théorème 1 montre que  $\mathfrak{i}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , Lagrangienne pour B.

On montre de même que i' est Lagrangienne pour B.

Pour montrer que (B, i, i') est un triple de Manin de  $\mathfrak{g}$ , on se propose d'appliquer le Théorème 3.

Montrons que  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}' = \{0\}$ . Soit  $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}'$ . Alors, comme  $\mathfrak{n}'$  est orthogonal à  $\mathfrak{j}_0$ , pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ , il en est ainsi de X. Notons  $R_+$  l'ensemble

des poids non nuls de  $j_0$  dans  $\mathfrak{m}_+$ . Ceux-ci sont en particulier nuls sur  $j_-$ . Alors on a :

$$X = \sum_{\alpha \in R_{+}} (X(\alpha) + \tau(X(\alpha))), \quad où \quad X(\alpha) \in \mathfrak{m}_{+}^{\alpha}$$
 (3.18)

On note que  $\tau(X(\alpha))$  est de poids  $\beta$  sous  $\mathfrak{j}_0$ , où  $\beta$  est un poids de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{m}_-$ , donc nul sur  $\mathfrak{j}_+$ . La décomposition (3.18) apparait alors comme une décomposition de X en vecteurs poids sous  $\mathfrak{j}_0$ , pour des poids deux à deux distincts. Comme  $X \in \mathfrak{n}' \subset \mathfrak{b}'_0$ , et que  $\mathfrak{m}_+ \in \mathfrak{g}_+$ , il faut que, pour tout  $\alpha \in R_+$ , avec  $\alpha$  positive, on ait  $X(\alpha) = 0$ . D'autre part, si  $\alpha \in R_+$ , avec  $\alpha$  négative,  $\tau(X(\alpha))$  est un élément de  $\mathfrak{m}_-^\beta$ , avec  $\beta$  négative. En effet  $\beta$  est l'image de  $\alpha$  par le prolongement  $\mathbb{R}$ -linéaire de A à l'espace vectoriel réel engendré par  $\Gamma_+$ . Alors  $\tau(X(\alpha))$  appartient à  $\mathfrak{b}_0$ . Comme  $X \in \mathfrak{n}'$ , on doit avoir  $\tau(X(\alpha)) = 0$ , donc aussi  $X(\alpha) = 0$ . Finalement X = 0, comme désiré. Donc  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}' = \{0\}$ . On montre de même  $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ .

$$\tilde{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}},\ \mathfrak{f}=\mathfrak{j}_{0}\cap\mathfrak{h},\ \tilde{\mathfrak{f}}=\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$$

Si  $\alpha \in R_+$ , on note:

$$\mathfrak{h}_{\alpha} = \{ X + \tau(X) | X \in \mathfrak{m}_{+}^{\alpha} \}$$

Alors, d'après (2.41) où l'on prend  $R_* = R_+$ , on a :

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{f}} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R_{\perp}} \mathfrak{h}_{\alpha}) \tag{3.19}$$

Cette décomposition apparait comme une décomposition de  $\tilde{\mathfrak{h}}$  en représentations de  $\mathfrak{f}$  sans sous-quotients simples équivalents, les  $\mathfrak{h}_{\alpha}$  étant de plus irréductibles. Comme  $\mathfrak{p}'$ contient  $\tilde{\mathfrak{f}}$ , on en déduit :

$$\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}' = \tilde{\mathfrak{f}} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R_+, \mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{p}'} \mathfrak{h}_\alpha)$$
 (3.20)

On note encore A le prolongement  $\mathbb{R}$ -linéaire de A au sous-espace vectoriel réel de  $\mathfrak{j}_0^*$  engendré par  $\Gamma_+$ . On a alors, pour tout  $\alpha \in R_+$ ,  $\sigma(\mathfrak{g}^{\alpha}) = \mathfrak{g}^{A\alpha}$ . Comme  $\mathfrak{p}'$  est somme de sous-espaces poids sous  $\mathfrak{j}_0$ , on a  $\mathfrak{h}_{\alpha} \subset \mathfrak{p}'$  si et seulement si  $\alpha$  et  $A\alpha$  sont des poids de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{p}'$  c'est à dire:

$$\alpha \in R_+ \cap (R'_+ \cup \tilde{R}^-) \text{ et } A\alpha \in R_- \cap (R'_- \cup \tilde{R}^+)$$
 (3.21)

Calculons  $p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_{\alpha})$  pour  $\alpha$  satisfaisant (3.21). On distingue quatre cas. 1)

$$\alpha \in R_+ \cap R'_+, \ A\alpha \in R_- \cap R'_-$$

Dans ce cas , si  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ , on a  $X \in \mathfrak{m}'_{+}$ ,  $\tau(X) \in \mathfrak{m}'_{-}$ . Alors  $p^{\mathfrak{n}'}(X + \tau(X)) = X + \tau(X)$ . Donc :

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_{\alpha}) = \mathfrak{h}_{\alpha}$$

2) 
$$\alpha \in R_{+} \cap R'_{+}, \ A\alpha \in \tilde{R}^{+} \setminus R'_{-}$$

On trouve comme ci-dessus que si  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ , on a  $X \in \mathfrak{m}'_+$ ,  $\tau(X) \in \mathfrak{n}'$ . Alors  $p^{\mathfrak{n}'}(X + \tau(X)) = X$ . D'où l'on déduit que :

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_{\alpha}) = \mathfrak{m}_{+}^{\alpha}$$

3) 
$$\alpha \in \tilde{R}^- \setminus R'_+, \ A\alpha \in R_- \cap R'_-$$

Si  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ , on a  $X \in \mathfrak{n}'$ ,  $\tau(X) \in \mathfrak{m}'_{-}$ . Alors  $p^{\mathfrak{n}'}(X + \tau(X)) = \tau(X)$ . Donc :

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_{\alpha}) = \mathfrak{m}_{-}^{A\alpha}$$

4) 
$$\alpha \in \tilde{R}^- \setminus R'_+, \ A\alpha \in \tilde{R}^- \setminus R'_-$$

Alors on aurait  $\mathfrak{h}_{\alpha} \subset \mathfrak{n}'$  et cette possibilité est exclue, d'après ce qu'on a vu plus haut.

Notons:

$$\mathfrak{n}_1 := \left( \bigoplus_{\alpha \in R_+^+ \cap R_+', A\alpha \notin R_-'} \mathfrak{m}_+^{\alpha} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R_+^- \setminus R_+', A\alpha \in R_-'} \mathfrak{m}_-^{A\alpha} \right) \tag{3.22}$$

et

$$\mathfrak{m}_1 = ((\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}' \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'))^{der}, \ \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{j}_0$$
 (3.23)

L'analyse des poids sous  $j_0$  montre que

$$\mathfrak{l}_1=\mathfrak{j}_0\oplus(\oplus_{lpha_{\in R_1}}\mathfrak{g}^lpha)$$

où:

$$R_1 = (R_+ \cap R'_+ \cap A^{-1}(R_- \cap R'_-)) \cup (R_- \cap R'_- \cap A(R_+ \cap R'_+))$$

En particulier  $l_1$  et  $n_1$  ont une intersection réduite à zéro.

On note  $\sigma_1$  la restriction de  $\sigma$  à  $\mathfrak{m}_1$ , qui est clairement une f-involution. En effet  $\mathfrak{m}_1$  est la somme directe de son intersection avec  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_-$ , et  $\sigma_1$  permute ces deux idéaux. On note  $\mathfrak{h}_1$  l'ensemble des points fixes de  $\sigma_1$ . On déduit de la définition de  $\mathfrak{m}_1$  (cf. (3.23)), et de  $\sigma_1$  que :

$$\mathfrak{h}_1 = (\bigoplus_{\alpha \in R_+ \cap R'_+, A\alpha \in R_- \cap R'_-} \mathfrak{h}_\alpha) \oplus (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{m}_1)$$
(3.24)

Notons:

$$\mathfrak{i}_1 = p^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$$

Grâce à (3.20) et ce qui précéde on voit que  $\mathfrak{i}_1$  est la somme de son intersection,  $\tilde{\mathfrak{f}}$ , avec  $\mathfrak{j}_0$ , avec son intersection avec l'orthogonal de  $\mathfrak{j}_0$  pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Tenant compte du fait que A préserve le signe des racines, on voit, grâce à la discussion ci-dessus et à (3.20), que l'intersection de  $\mathfrak{i}_1$  avec

l'orthogonal de  $\mathfrak{j}_0$  pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ , coincide avec celle de  $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ . On en déduit facilement l'égalité :

$$\hat{\mathfrak{t}}_1 = (\mathfrak{h}_1 + \tilde{\mathfrak{f}}) \oplus \mathfrak{n}_1 \tag{3.25}$$

Montrons que  $\mathfrak{p}_1 := \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . D'après la définition de  $\mathfrak{p}_1$ , et de celle de  $\mathfrak{m}_1$ ,  $\mathfrak{n}_1$  (cf (3.22), (3.23)),  $\mathfrak{p}_1$  est la somme de son intersection  $\mathfrak{p}_{1+}$  avec  $\mathfrak{g}_+$  avec celle avec  $\mathfrak{g}_-$ ,  $\mathfrak{p}_{1-}$ . Il suffit donc d'étudier séparément ces intersections. On ne traite que  $\mathfrak{p}_{1+}$ ,  $\mathfrak{p}_{1-}$  se traitant de la même manière. Soit :

$$E = \{ \alpha \in R_+^+ \cap R_+' | A\alpha \notin R_-' \}, F = R_+ \cap R_+' \cap A^{-1}(R_- \cap R_-') \}$$

Alors  $E, F, E \cup F$  sont des parties closes du système de racines de  $j_0$  dans  $I \cap I' \cap \mathfrak{g}_+, R_+ \cap R'_+, E \cup F$  en étant une partie parabolique, contenant  $R_+^+ \cap R'_+$  et dont E est un idéal (cf [War], 1.1.2.9, 1.1.2.13, pour la terminologie). Cela résulte du fait que  $R_+^+, R'_+$  et  $R'_-$  sont des parties closes, d'après leur définition (cf. fin de la Définition 5). Le seul point non immédiat est le fait que si  $\alpha \in E$ ,  $\beta \in F$  et  $\alpha + \beta \in \tilde{R}$ , alors  $\alpha + \beta$  appartient à E. D'après la définition de  $R'_-$ , on voit que nos hypothèses impliquent que  $A(\alpha + \beta) \notin R'_-$ . Il reste à voir que  $\alpha + \beta$  est positive. L'étude de ses composantes dans la base  $\Sigma$ , montre que l'une de celles-ci, correspondant à une racine  $\gamma \in \Gamma_+ \cap A^{-1}\Gamma'_-$ , est strictement positive, car pour l'une au moins de ces racines , la composante de  $\alpha$  est strictement positive tandis que celle de  $\beta$  est nulle. Cela implique que  $\alpha + \beta$  est positive et finalement dans E.

Joint à la définition de  $\mathfrak{p}_{1+}$ , et celles de  $\mathfrak{m}_1$  et  $\mathfrak{n}_1$ , cela implique que  $\mathfrak{p}_{1+}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' \cap \mathfrak{g}_+$ .

On conclut que  $\mathfrak{p}_1$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ , qui contient  $\mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ . La démonstration montre aussi que  $\mathfrak{n}_1$  en est le radical nilpotent. Notons  $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{m}_1$  et  $\mathfrak{t}_1$  l'intersection de  $\mathfrak{f}$  avec le centre  $\mathfrak{a}_1$  de  $\mathfrak{l}_1$ . Montrons que :

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{t}_1 \tag{3.26}$$

En effet tout élément de  $\mathfrak{f}$  est de la forme  $X + \tau(X)$ , où X est un élément de  $\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_+$ . On note que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{m}_1$  sont la somme directe de leurs intersection avec  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_-$ . Il en va de même de  $\mathfrak{j}_0$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a}_1$ . Alors X est la somme d'un élément de  $\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_+$  avec un élément de  $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{g}_+$ . La décomposition ci-dessus en résulte aussitot.

On pose:

$$\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}_1 \tag{3.27}$$

de sorte que (3.25) se réécrit

$$\mathfrak{i}_1=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1}\oplus\mathfrak{n}_1$$

On a:

$$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{j}_{0}=dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_{0}\cap\mathfrak{m}_{+})+dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_{0}\cap\mathfrak{m}_{-})+dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}=dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{f}+dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}$$

Comme  $i_a$  est Lagrangienne dans a, tenant compte de ce qui précède, on a :

$$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{j}_{0} = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{f}_{1} + dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{t}_{1} + dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$$

$$(3.28)$$

d'où l'on déduit :

$$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{j}_0 = dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_1) + dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}_1 \tag{3.29}$$

Montrons:

$$dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_1) = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{f}_1 \tag{3.30}$$

En effet,  $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{m}_1$ , vérifie :

$$\mathfrak{f}_1 = \{X + \tau(X) | X \in \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_{1+} \}$$

et

$$\mathfrak{j}_0\cap\mathfrak{m}_1=(\mathfrak{j}_0\cap\mathfrak{m}_{1+})\oplus(\mathfrak{j}_0\cap\mathfrak{m}_{1-})$$

les deux facteurs étant échangés par  $\tau$ . (3.30) en résulte. On déduit de (3.28) à (3.30) que :

$$dim_{\mathbb{R}}i_{\mathfrak{a}_1}=dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}_1$$

Comme  $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  sont isotropes pour B, et orthogonales pour B, puisque le centre d'une algèbre réductive est orthogonal à son idéal dérivé pour toute forme invariante, ce qui précède montre que :

$$i_{\mathfrak{a}_1} \ est \ Lagrangienne \ dans \mathfrak{a}_1$$
 (3.31)

Cela implique que  $i_1$  est Lagrangienne pour B.

On introduit de la même manière  $\mathfrak{i}'_1$ . On prend  $A_1$  égal à la restriction de A à  $\Gamma_{1+} = \Gamma_+ \cap \Gamma'_+ \cap A^{-1}(\Gamma_- \cap \Gamma'_-)$ . On définit de même  $A'_1$ . Montrons que  $(A_1, A'_1, \mathfrak{i}_{a_1}, \mathfrak{i}_{a'_1})$  est une donnée de Belavin-Drinfeld généralisée. Les conditions 1), 2), 3) résultent immédiatement des conditions satisfaites par  $(A, A', \mathfrak{i}_a, \mathfrak{i}_{a'})$ . La condition 4) résulte de (3.31). Enfin 5) résulte de la condition 5) pour  $\mathcal{BD}$ , joint à (3.26) et (3.27). L'application de l'hypothèse de récurrence montre que  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  un triple de Manin associé à  $\mathcal{BD}_1$  et  $\mathcal{W}_1$ . Le Théorème 3 permet de conclure que  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  est un triple de Manin, d'antécédent  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ . Ceci achève la preuve de la Proposition.  $\square$ 

#### Théorème 5

(i) Tout triple de la forme  $\mathfrak{T}_{\mathbb{BD},\mathbb{W}}$ , où  $\mathbb{BD}$  est une donnée de Belavin-Drinfeld généra-

lisées, et W un ensemble de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , est un triple de Manin fortement standard.

(ii) Réciproquement tout triple fortement standard est de cette forme.

(iii) Soit  $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\mathcal{W}}$  (resp  $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\mathcal{W}}$ ), où  $\mathcal{BD}$ ,  $\underline{\mathcal{BD}}$  sont des données de Belavin-Drinfeld généralisées, et  $\mathcal{W}$ ,  $\underline{\mathcal{W}}$  des ensembles de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}^{der}$ . Ces triples de Manin sont conjugués sous G, si et seulement si  $\mathcal{BD} = \underline{\mathcal{BD}}$ . Alors ils sont conjugués par l'élément de  $J_0$  qui conjugue  $\mathcal{W}$  et  $\underline{\mathcal{W}}$ .

#### Démonstration :

Le point (i) a été vu à la Proposition précédente.

Prouvons (ii). Soit  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  un triple fortement standard sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ . On utilise les notations qui suivent le Lemme 16. D'après la Proposition 7, l'application A est une bijection de  $R_+$  sur  $R_-$  qui préserve les signes des racines. Donc elle induit une bijection de  $\Gamma_+$  sur  $\Gamma_-$ , notée encore A. On a des propriétés analogues pour A'. On note  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{i}'_{\mathfrak{a}'} = \mathfrak{i}' \cap \mathfrak{a}'$ . On voit facilement que  $\mathfrak{f}$  est l'espace vectoriel engendré par les  $H_{\alpha} + H_{A\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_+$  et que  $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0$ . On a des propriétés similaires pour  $\mathfrak{i}'$ . Alors (3.16) résulte du fait que  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$  ont une intersection réduite à zéro. D'après le Théorème 1, le Lemme 17 et (3.3),  $(A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}'_{\mathfrak{a}'})$  est une donnée de Belavin-Drinfeld généralisée, notée  $\mathfrak{BD}$ . Il reste à trouver un système de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , vérifiant les relations du Lemme 22, avec  $\tau$  comme dans le Lemme 16. Si  $\alpha \in \Gamma'_+$  est comme dans le Lemme 18, i.e.  $\alpha \in dom\ C$ ,  $\alpha \notin Im\ C$ , on choisit  $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ ,  $Y_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ , tels que  $[X_{\alpha}, Y_{\alpha}] = H_{\alpha}$ .

Puis notant  $\alpha_i = C^i \alpha$ , i = 0, ..., n, on définit par récurrence sur i, pour Z = X ou Z = Y:

$$Z_{\alpha_{i+1}} := \tau^{-1} \tau'(Z_{\alpha_i})$$
 (3.32)

l'expression du membre de droite étant bien définie, pour i = 0, ..., n-1, car alors  $\alpha_i \in dom C$ .

Puis on pose, pour Z = X ou Z = Y:

$$Z_{A\alpha_i} = \tau(Z_{\alpha_i}), \ si \ \alpha_i \in \Gamma_+, \ Z_{A'\alpha_i} = \tau'(Z_{\alpha_i}), \ si \ \alpha_i \in \Gamma'_+$$
 (3.33)

Cette définition est cohérente, car si  $\beta = A\alpha_i = A'\alpha_{i'}$ , on a  $\alpha_{i'} \in dom C$  et  $C\alpha_{i'} = \alpha_i$ . Mais alors on a i = i' + 1. Il résulte de (3.32) que les deux définitions de  $Z_{\beta}$  de (3.33) coincident.

Maintenant, soit un élément  $\beta$  de  $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$  qui n'est pas de la forme  $\alpha_i$ , pour un  $\alpha$  comme ci-dessus. En particulier on a  $\beta \notin dom C$ ,  $\beta \notin Im C$ . On choisit  $X_{\beta} \in \mathfrak{g}^{\beta}$ ,  $Y_{\beta} \in \mathfrak{g}^{-\beta}$ , tels que  $[X_{\beta}, Y_{\beta}] = H_{\beta}$ , puis on pose, pour Z = X ou Z = Y:

$$Z_{A\beta} = \tau(Z_{\beta}) \ si \ \beta \in \Gamma_+, Z_{A'\beta} = \tau'(Z_{\beta}) \ si \ \beta \in \Gamma'_+$$
 (3.34)

Montrons que cette définition est cohérente. Supposons que  $A\beta$  soit défini et égal à l' un des  $A'\alpha_i$  ci dessus. On aurait alors  $\beta \in Im\ C$ , ce qui est impossible. Comme  $\beta \notin dom\ C$ , on voit de même que  $A'\beta$ , s'il est défini ne peut-être égal à l'un des  $A\alpha_i$ . Enfin si  $A\beta = A'\beta'$ , pour deux éléments  $\beta$ ,  $\beta'$  comme ci-dessus, on aurait  $\beta \in Im\ C$ , ce qui n'est pas. Les autres égalités à envisager pour voir la cohérence de (3.33) et (3.34) étant exclues, d'après la bijectivité de A et A', cette cohérence est donc prouvée.

Enfin si  $\alpha \in \Sigma$ ,  $\alpha \notin \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , on choisit  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ , tels que  $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ . Il est alors facile de voir que la famille  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$  est un système de générateurs de Weyl,  $\mathcal{W}$ . De plus la définition de  $\tau$ ,  $\tau'$  et (3.33) (3.34) montrent que le triple  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  est égal à  $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\mathcal{W}}$ . Ceci achève la preuve de (ii).

Prouvons (iii). Supposons les deux triples conjugués par un élément de G.

On note le premier triple  $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$  qu'on suppose sous  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ , on note  $\mathcal{BD} = (A, A', \mathbf{i}_{\mathfrak{a}}, \mathbf{i}_{\mathfrak{a}'})$  et on introduit des notations similaires pour le deuxième triple, en soulignant. Montrons que :

$$\mathbf{i} \cap \mathbf{j}_0 = \underline{\mathbf{i}} \cap \mathbf{j}_0, \quad \mathbf{i}' \cap \mathbf{j}_0 = \underline{\mathbf{i}}' \cap \mathbf{j}_0 \tag{3.35}$$

On procède par récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}^{der}$ , le résultat étant clair si celle-ci est nulle. Par ailleurs, comme deux sous-algèbres paraboliques standard conjuguées sous G sont égales, on a

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \tag{3.36}$$

et les deux triples sont conjugués par un élément de  $P \cap P'$ . De la Proposition 4, on déduit que les antécédents des deux triples, qui sont fortement standard, sont conjugués par un élément de  $L \cap L'$ . L'application de l'hypothèse de récurrence conduit au résultat voulu, car si  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  est l'antécédent de  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ , la définition des triples fortement standard montre que  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0 = \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{j}_0$ , etc. L'égalité (3.36) montre que  $\mathfrak{m} = \underline{\mathfrak{m}}$ , donc  $\Gamma = \underline{\Gamma}$ . De (3.35), on déduit l'égalité de  $\mathfrak{f} := \mathfrak{m} \cap \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0$  avec  $\underline{\mathfrak{f}} := \mathfrak{m} \cap \underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{j}_0$ . Comme la définition de  $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\mathcal{W}}$  montre que  $\mathfrak{f}$  est engendré par  $(H_{\alpha} + H_{A\alpha})_{\alpha \in \Gamma_+}$  et de même pour  $\underline{\mathfrak{f}}$ , l'égalité de A et A en résulte immédiatement. Il en va de même de l'égalité de A' et A'. Comme  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$  et de même pour  $\underline{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}}$ , on déduit l'égalité de ces espaces de (3.35), car  $\mathfrak{a} = \underline{\mathfrak{a}}$  et  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_{\mathfrak{0}} \cap \mathfrak{a}$  et de même pour  $\underline{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}}$ . On procède de même pour  $\underline{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}'}$ ,  $\underline{\mathfrak{i}'}_{\mathfrak{a}'}$ . Donc BD est égal à  $\underline{BD}$ , comme désiré. Maintenant, il est clair qu'un élément de  $J_0$  qui conjugue W et  $\underline{W}$ , conjugue les deux triples.  $\square$ 

Remarque 3 Soit  $\mathfrak{g}_1$  une algèbre de Lie simple complexe,  $\mathfrak{j}_1$ , une sousalgèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{j}_0=\mathfrak{j}_1\times\mathfrak{j}_1$  et B la forme  $\mathbb{C}$ -bilinéaire sur  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}$ -invariante, égale à  $K_{\mathfrak{g}_1}$  sur le premier facteur et à  $-K_{\mathfrak{g}_1}$  sur le deuxième facteur. La classification de Belavin et Drinfeld de certaines Rmatrices (cf. [BD], Théorème 6.1) se réduit, d'après l.c. équations 6.1 à 6.5 , et [S], Propositions 1 et 2, à la classification des triples de Manin pour  $\mathfrak{g}$ ,  $(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$ , où  $\mathfrak{i}$  est égal à la diagonale diag $(\mathfrak{g}_1)$  de  $\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1$ , modulo la conjugaison par la diagnale de  $G_1\times G_1$ .

Ceci se fait simplement à l'aide du Théorème précédent.

On remarque que  $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_1 \times \{0\}$ ,  $\mathfrak{g}_- = \{0\} \times \mathfrak{g}_1$ . On fixe pour cela une sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}_1$  de  $\mathfrak{g}_1$ . On note  $\mathfrak{b}'_1$  la sous-algèbre de Borel opposée, relativement à  $\mathfrak{j}_1$ . On pose  $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}'_1$ . Soit  $\mathcal{W}_1$  un système de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}_1$ , relativement à l'ensemble,  $\Sigma_1$ , des racines simples de l'ensemble des racines de  $\mathfrak{j}_1$  dans  $\mathfrak{b}_1$ . On note  $\mathcal{W}$  le système de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}$  égal à  $(\mathcal{W}_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \cup \mathcal{W}_1$ . D'après le Théorème précédent, il existe une unique donnée de Belavin-Drinfeld généralisée,  $\mathcal{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_a, \mathfrak{i}_{a'})$  telle que  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  soit conjugué à  $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\mathcal{W}}$ . Il est alors facile de voir que  $\mathfrak{i}$  est sous  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$  sont réduits à zéro et  $\Gamma_+ = \Sigma_1 \times \{0\}$ . Par ailleurs, la conjugaison

des triples se traduit par le fait que l'isomorphisme  $\tau$  du Lemme 22, de  $\mathfrak{g}_1$  sur  $\mathfrak{g}_1$ , est un automorphisme intérieur de  $\mathfrak{g}_1$ . Par ailleurs, il préserve  $\mathfrak{j}_1$  et induit une permutation, A, de l'ensemble  $\Sigma_1$ . Cette permutation doit donc être triviale, i.e. A est l'identité (cf. [Bou], Chapitre VIII, Paragraphe 5.2). Alors  $\tau$  est l'identité et la première sous-algèbre isotrope de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{BD},\mathcal{W}}$  est la diagonale. L'élément de G qui conjugue les deux triples stabilise donc la diagonale. C'est donc un élément de la diagonale.

Il résulte de la discussion précédente et du Théorème 5, que l'ensemble  $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\mathcal{W}}$ , où  $\mathcal{BD}$  décrit l'ensemble des données de Belavin-Drinfeld généralisées telles que A est l'identité de  $\Sigma_1$ ,  $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \{0\}$ , classifie les triples de Manin pour  $\mathfrak{g}$ ,  $(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$ , où  $\mathfrak{i}$  est égal à la diagonale  $diag(\mathfrak{g}_1)$  de  $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ , modulo la conjugaison par la diagnale de  $G_1 \times G_1$ . Ceci redonne le résultat de Belavin-Drinfeld [BD], Théorème 6.1.

# 4 Triples de Manin réels pour une algèbre semi-simple complexe

#### 4.1

Soit  $\mathfrak{g}_1$  une algèbre de Lie semi-simple complexe, soit  $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$  une forme réelle déployée de  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{b}_1$  une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}_1$ , complexifiée d'une sous-algèbre de Borel,  $\mathfrak{b}_{1\mathbb{R}}$ , de  $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$ . Soit  $\mathfrak{j}_{1\mathbb{R}}$  une sous-algèbre de Cartan déployée de  $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$ , contenue dans  $\mathfrak{b}_{1\mathbb{R}}$  et  $\mathfrak{j}_1$  sa complexifiée. On note  $X \mapsto \overline{X}$  la conjugaison de  $\mathfrak{g}_1$  par rapport à sa forme réelle  $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$ . On note  $\eta$  l'application de  $\mathfrak{g}_1$  dans  $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ , définie par :

$$\eta(X) = (X, \overline{X}), \ X \in \mathfrak{g}_1$$

Alors  $\eta(\mathfrak{g}_1)$  est une forme réelle de  $\mathfrak{g}$  et la conjugaison, j, par rapport à cette forme réelle vérifie :

$$j(X,Y) = (\overline{Y}, \overline{X}), X, Y \in \mathfrak{g}_1$$

On note  $\mathfrak{b}_0 := \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_1$  et  $\mathfrak{j}_0 := \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$ 

Si V est un sous-espace vectoriel réel de  $\mathfrak{g}_1$ , on noptera  $V_{\mathbb{C}} = \eta(V) + i\eta(V) \subset \mathfrak{g}$ . On utilisera les Notations qui suivent le Lemme 16 pour  $\mathfrak{g}$ .

Si B est une forme  $\mathbb{R}$ -bilinéaire invariante sur  $\mathfrak{g}_1$ , on note  $B_{\mathbb{C}}$ , l'unique forme  $\mathbb{C}$ -bilinéaire invariante sur  $\mathfrak{g}$ , telle que :

$$B_{\mathbb{C}}(\eta(X), \eta(X')) = B(X, X'), \ X, X' \in \mathfrak{g}_1$$

$$(4.1)$$

On voit aisément que, si  $\mathfrak{s}$ , est un idéal simple de  $\mathfrak{g}_1$ , et si la restriction de B à  $\mathfrak{s}$  est égal à  $Im \lambda K_{\mathfrak{s}}$ , pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a :

$$B_{\mathbb{C}}((X,Y),(X',Y')) = \lambda K_{\mathfrak{s}}(X,X') - \overline{\lambda}K_{\mathfrak{s}}(Y,Y'), \ X,X',Y,Y' \in \mathfrak{s}$$
 (4.2)

La démonstration de la Proposition suivante est immédiate.

**Proposition 9** On fixe une une forme de Manin réelle sur  $\mathfrak{g}_1$ . L'application qui à un un triple de Manin réel dans  $\mathfrak{g}_1$ ,  $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ , associe  $(B_{\mathbb{C}}, \mathfrak{i}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{i}'_{\mathbb{C}})$ , est une bijection entre l'ensemble des triples de Manin réels de  $\mathfrak{g}_1$ , associés à B, et l'ensemble des triples de Manin complexes de  $\mathfrak{g}$ , associés à  $B_{\mathbb{C}}$ , et pour lesquels chacune des sous-algèbres Lagrangiennes est stable par  $\mathfrak{j}$ .

Cette bijection transforme triples fortement standard, relativement à  $\mathfrak{b}_1$ ,  $\mathfrak{j}_1$ , en triples fortement standard relativement à  $\mathfrak{b}_0$ ,  $\mathfrak{j}_0$ . En outre elle transforme les triples conjugués par  $G_1$  en triples conjugués par  $\eta(G_1)$ 

## Hypothèse

On suppose que, pour tout déal simple de  $\mathfrak{g}_1$ , la restriction de B à  $\mathfrak{s}$  est égal à  $Im \lambda K_{\mathfrak{s}}$ , pour un  $\lambda$  réel.

On note  $\mathfrak{g}_{1+}$  la somme des idéaux simples  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}_1$ , tels que la restriction de B à  $\mathfrak{s}$  est égal à  $Im \lambda K_{\mathfrak{s}}$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . On définit de même  $\mathfrak{g}_{1-}$ . Alors, au vu de (4.2), on a, pour la forme  $B_{\mathbb{C}}$ :

$$\mathfrak{g}_{+} = \mathfrak{g}_{1+} \times \mathfrak{g}_{1-}, \quad \mathfrak{g}_{-} = \mathfrak{g}_{1-} \times \mathfrak{g}_{1+} \tag{4.3}$$

On note  $\tilde{R}_{1*}$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{j}_1$  dans  $\mathfrak{g}_{1*}$ , où \* vaut + ou -. Alors, avec les Notations qui suivent le Lemme 16, on a :

$$\tilde{R}_{+} = (\tilde{R}_{1+} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \tilde{R}_{1-})$$

On note  $\Sigma_{1+}$  (resp.  $\Sigma_{1-}$ ) les racines simples de  $j_{1+} := j_1 \cap \mathfrak{g}_{1+}$  dans  $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{g}_{1+}$  (resp.  $j_{1-} := j_1 \cap \mathfrak{g}_{1-}$  dans  $\mathfrak{b}'_1 \cap \mathfrak{g}_{1-}$ , où  $\mathfrak{b}'_1$  est la sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}_1$  opposée à  $\mathfrak{b}_1$ , relativement à  $j_1$ )), qu'on identifie à des racines de  $j_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . Alors on a :

$$\Sigma_{+} = (\Sigma_{1+} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \Sigma_{1-}), \ \Sigma_{-} = ((-\Sigma_{1-}) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (-\Sigma_{1+})) \ (4.4)$$

Soit  $W_1$  un système de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}_1$ , relativement à  $\Sigma_1$ , dont tous les éléments sont dans  $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$ . Soit W le système de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , relativement à  $\Sigma := \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ , et défini comme suit, en tenant compte de (4.4).

Si  $\alpha \in \Sigma_{1+}$  on pose :

$$H_{(\alpha,0)} = (H_{\alpha}, 0), \ X_{(\alpha,0)} = (X_{\alpha}, 0), \ Y_{(\alpha,0)} = (Y_{\alpha}, 0)$$
 (4.5)

$$H_{(0,-\alpha)} = (0, -H_{\alpha}), \ X_{(0,-\alpha)} = (0, Y_{\alpha}), \ Y_{(0,-\alpha)} = (0, X_{\alpha})$$
 (4.6)

Si  $\alpha \in \Sigma_{1-}$ , on pose :

$$H_{(0,\alpha)} = (0, H_{\alpha}), \ X_{(0,\alpha)} = (0, X_{\alpha}), \ Y_{(0,\alpha)} = (0, Y_{\alpha})$$
 (4.7)

$$H_{(-\alpha,0)} = (-H_{\alpha}, 0), \ X_{(-\alpha,0)} = (Y_{\alpha}, 0), \ Y_{(-\alpha,0)} = (X_{\alpha}, 0)$$
 (4.8)

On notera  $\alpha \mapsto \alpha^f$  l'échange des facteurs dans  $j_1^* \times j_1^* = j_0^*$ . On fait de même dans  $J_0$ .

#### Proposition 10

On fixe une forme de Manin réelle, B, sur  $\mathfrak{g}_1$ . Soit  $\mathfrak{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$  une donnée de Belavin-Drinfeld généralisée pour  $\mathfrak{g}$  et  $B_{\mathbb{C}}$ .

- (i) Pour  $t \in J_0$ , le triple de Manin  $(B_{\mathbb{C}}, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}') = \mathfrak{T}_{\mathcal{BD}, tW}$  est le complexifié d'un triple réel de  $\mathfrak{g}_1$ , relativement à B, si et seulement si :
- 1) l'application  $\alpha \mapsto -\alpha^f$  induit une bijection de  $\Gamma_+$  sur  $\Gamma_-$  et l'on a, en prolongeant A par  $\mathbb{R}$ -linéarité :

$$(A\alpha)^f = A^{-1}(\alpha^f), \ \alpha \in \Gamma_+$$

- 2) A' vérifie des conditions similaires.
- 3)  $i_{\mathfrak{a}}$  et  $i_{\mathfrak{a}'}$  sont stables par j 4)

Posant 
$$u := \overline{t}(t^f)^{-1}$$
, on a  $u^{\alpha} = u^{A\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_+$ 

- 5) L'élément t de  $J_0$  vérifie des conditions similaires relativement à A'.
- (ii) On fixe  $\mathbb{BD}$  et t vérifiant les conditions ci-dessus. Soit  $t_1 \in J_1$  et  $t' = (t_1, \overline{t}_1)t$ . Alors  $\mathbb{BD}$  et t' vérifient les conditions ci-dessus, et les triples complexes  $\mathcal{T}_{\mathbb{BD},tW}$ ,  $\mathcal{T}_{\mathbb{BD},t'W}$  sont les complexifiés de triples réels de  $\mathfrak{g}_1$ , conjugués par  $t_1$ .

### Démonstration :

Si l'automorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathfrak{g}$ , j, laisse  $\mathfrak{i}$  invariant, il laisse invariant le radical nilpotent  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{i}$ , donc aussi  $\mathfrak{p}$ , qui est le normalisateur de  $\mathfrak{n}$ . Par ailleurs  $\mathfrak{j}_0$  est contenu dans  $\mathfrak{p}$  et est invariant par j. Donc  $j(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$ , d'où l'on déduit  $j(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ .

Alors  $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$  est invariant par j si et seulement si :

$$j(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \ j(\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \ j(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$$
 (4.9)

La seconde égalité de l'équation précédente conduit à 3).

L'égalité (cf (3.19)):

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{f} \oplus (\oplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{h}_{\alpha}) \tag{4.10}$$

et la stabilité de  $\mathfrak{j}_0$ , et de son orthogonal pour la forme de Killing par j, montre que la première égalité de (4.9) implique :

$$i(f) = f$$

Mais f est engendré par les  $H_{\alpha} + H_{A\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_{+}$ . De plus  $j(H_{\alpha} + H_{A\alpha})$  est égal à  $H_{\alpha^{f}} + H_{(A\alpha)^{f}}$ . Ce dernier doit être une combinaison linéaire de  $H_{\beta} + H_{A\beta}$ ,  $\beta \in \Gamma_{+}$ . Mais on a :

$$H_{\beta} \in \mathfrak{g}_{+}, \ et \ H_{A\beta} \in \mathfrak{g}_{-}, \ H_{\alpha^{f}} \in \mathfrak{g}_{-}, \ H_{(A\alpha)^{f}} \in \mathfrak{g}_{+}$$

car f échange  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_-$  (voir (4.3)). Comme f envoie chaque élément de  $\Sigma$  sur l'opposé d'un élément de  $\Sigma$  (cf. (4.4)), la projection, sur  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_-$ , de l'écriture de  $H_{\alpha^f} + H_{(A\alpha)^f}$  dans la base de  $\mathfrak{f}$ , montre qu'il existe  $\beta \in \Gamma_+$  telle que :

$$(A\alpha)^f = -\beta, \ (\alpha)^f = -A\beta \tag{4.11}$$

Ceci implique immédiatement la condition 1). Comme:

$$j(\mathfrak{g}^{\alpha}) = \mathfrak{g}^{\alpha^f}, \ \alpha \in \tilde{R}$$

au vu de (4.10) et (4.11), la stabilité de  $\mathfrak h$  par j implique alors :

$$j(\mathfrak{h}_{\alpha}) = \mathfrak{h}_{-\beta}$$

où  $\alpha \in \Gamma_+$  et  $\beta$  est comme ci-dessus. Mais, la définition de  $\mathfrak{i}$  (cf. Proposition 8 et Lemme 22) montre que  $\mathfrak{h}_{\alpha}$  a pour base :

$$U_{\alpha} := t^{\alpha} X_{\alpha} + t^{A\alpha} X_{A_{\alpha}}$$

et  $\mathfrak{h}_{-\beta}$  a pour base:

$$V_{\beta} := t^{-\beta} Y_{\beta} + t^{-A\beta} Y_{A_{\beta}}$$

Par ailleurs la définition de j et celle de W montrent que :

$$j(X_{\alpha}) = Y_{-\alpha^f}, \ j(X_{A\alpha}) = Y_{-(A\alpha)^f}$$

Donc, on a:

$$j(U_{\alpha}) := \overline{t}^{\alpha} Y_{-\alpha^f} + \overline{t}^{A\alpha} Y_{-(A_{\alpha})^f}$$

L'écriture de la proportionnalité de  $j(U_{\alpha})$  à  $V_{\beta}$ , conduit à :

$$\overline{t}^{\alpha}t^{A\beta} = \overline{t}^{A\alpha}t^{\beta}, \alpha \in \Gamma_{+}$$

En tenant compte de (4.11), ceci implique la condition 4). On procède de même pour i'.

Ce qui précède montre que les conditions 1) à 5) sont nécessaires pour que le triple donné soit le complexifié d'un triple réel. Réciproquement, montrons que si ces conditions sont satisfaites le triple donné est bien le complexifié d'un triple réel. En effet, la deuxième égalité de (4.9) est alors satisfaite.

Comme les racines de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{n}$  sont celles de  $\mathfrak{j}_0$  dans  $\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_1$  qui ne sont pas combinaison linéaires d'éléments de  $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , on déduit la troisième égalité de (4.9) de la condition 1) et (4.11). Il reste à vérifier la première égalité de (4.9). D'abord, il résulte de 1) et de la discussion ci-dessus que :

$$f$$
 est stable par  $j$  (4.12)

Par ailleurs les conditions 1) et 4), et la discussion ci-dessus montre que :

$$j(\mathfrak{h}_{\alpha}) = \mathfrak{h}_{-(A\alpha)^f}, \ \alpha \in \Gamma_+$$
 (4.13)

On montre de même que :

$$j(\mathfrak{h}_{-\alpha}) = \mathfrak{h}_{(A\alpha)^f}, \ \alpha \in \Gamma_+$$
 (4.14)

Mais  $\mathfrak{h}$ , qui est isomorphe à sa projection dans  $\mathfrak{g}_+$ , est engendrée par les  $\mathfrak{h}_{\alpha}$ ,  $\mathfrak{h}_{-\alpha}$ ,  $\alpha \in \Gamma_+$ . Alors (4.12) à (4.14), joints à 1) montrent que  $\mathfrak{h}$  est stable

par  $\mathfrak{i}$ , ce qui achève de prouver que  $\mathfrak{i}$  est stable par j. On procède de même pour  $\mathfrak{i}'$ . Ceci achève de prouver (i). (ii) est une conséquence immédiate de la Proposition précédente

On se fixe une donnée de Belavin-Drinfeld généralisée, qui vérifie les propriétés 1) à 4) de la Proposition pécédente. On introduit  $C = A^{-1}A''$ , comme dans la Définition 5. On note  $\Gamma_0 := dom \ C \cup Im \ C$ . Si  $\alpha \in \Gamma_0$ , on note  $\mathcal{C}(\alpha)$ , l'ensemble des  $\beta \in \Gamma_0$  tels qu' il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\alpha, C\alpha, \dots, C^{n-1}\alpha \in \Gamma_0, \text{ et } \beta = C^n\alpha$$

ou:

$$\beta, C\beta, \dots, C^{n-1}\beta \in \Gamma_0, \text{ et } \alpha = C^n\beta$$

Si  $\alpha \in \Sigma_+$  n'appartient pas à  $\Gamma_0$ , on pose  $\mathcal{C}(\alpha) = \{\alpha\}$ . Suivant Panov [P1], on appelle les  $\mathcal{C}(\alpha)$  des chaines. Il est clair que les chaines sont disjointes ou confondues, et forment une partition de  $\Sigma_+$ . On appellera C-équivalence la relation d'équivalence sur  $\Sigma_+$ , dont les classes d'équivalence sont les chaines. On dira que, pour deux éléments distincts  $\alpha$  et  $\beta$ , de  $\Sigma_+$ ,  $\alpha$  est C-lié à  $\beta$  si  $\alpha \in dom C$  et  $\beta = C\alpha$ . On définit, pour  $\alpha \in \Gamma_0$ :

$$\check{\mathfrak{C}}(\alpha) := \{A^{-1}(-\beta^f) | \beta \in \mathfrak{C}(\alpha) \cap \Gamma_+\} \cup \{A'^{-1}(-\beta^f) | \beta \in \mathfrak{C}(\alpha) \cap \Gamma'_+\}$$

Si  $\alpha \notin \Gamma_0$ , on pose  $\check{\mathfrak{C}}(\alpha) := \mathfrak{C}(\alpha)$ .

#### Lemme 23

- (i) Pour tout  $\alpha \in \Sigma_+$ ,  $\check{\mathbb{C}}(\alpha)$  est de la forme  $\mathbb{C}(\beta)$ , et l'opération  $\check{}$  est une involution de l'ensemble des chaines.
- (ii) Si t vérifie les conditions 4) et 5) de la Proposition précédente, on a, avec les notations de celle-ci, pour tout  $\alpha \in \Gamma_0$ :

$$u^{\beta} = u^{\beta'}, \beta, \ \beta' \in \mathfrak{C}(\alpha)$$

$$u^{\beta} = \overline{u^{\alpha}}, \ \beta \in \check{\mathcal{C}}(\alpha)$$

 $D\'{e}monstration:$ 

Montrons (i). Il suffit d'étudier le cas  $\alpha \in \Gamma_0$ . Soit  $\alpha \in \Sigma_+$ . On note  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\alpha) \cap \Gamma_+$ ,  $\mathcal{A}' = \mathcal{C}(\alpha) \cap \Gamma'_+$ . De la définition des chaines, il résulte que, pour toute paire d'éléments distincts  $\beta$ ,  $\beta'$ , de  $\mathcal{A}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathcal{A}$ , où, pour  $i = 1, \ldots, n$ ,  $\beta_i$  est C-lié à  $\beta_{i+1}$ , avec  $\{\beta, \beta'\} = \{\beta_1, \beta_{n+1}\}$ .

On remarque que les conditions 1) et 2) impliquent, par un calcul immédiat, que :

Si 
$$\beta, \beta' \in \mathcal{A}$$
 sont  $C - li\acute{e}s$ ,  $A^{-1}(-\beta^f)$  et  $A^{-1}(-\beta'^f)$  sont  $C - li\acute{e}s$ 

On a le même énoncé pour  $\mathcal{A}'$ .

De ce qui précède, il résulte que les éléments de  $A^{-1}\mathcal{A}$  (resp.  $A'^{-1}\mathcal{A}'$ ) sont C-équivalents entre eux. Pour achever de prouver (i), il suffit de traiter le

cas où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont non vides et d'intersection vide. De la définition des chaines , et du fait que  $dom\ C$  (resp.  $Im\ C$ ) est un sous-ensemble de  $\Gamma'_+$  (resp.  $\Gamma_+$ ), cela n'est possible que si  $\mathcal{C}(\alpha)$  n'a que deux éléments et  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}'$ ) un élément  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ), où  $\beta'$  et  $\beta$  sont C-liés. En outre :

$$\beta \in \Gamma_+ \setminus \Gamma'_+, \ \beta' \in \Gamma'_+ \setminus \Gamma_+ \tag{4.15}$$

Mais alors  $A'\beta'$  et  $A\beta$  sont égaux et on note  $\gamma$  leur valeur commune. Utilisant les conditions 1) et 2) de la Proposition 10, on en déduit que :

$$A^{-1}(-\beta^f) = A'^{-1}(-\beta'^f) = -\gamma^f, \ \check{\mathcal{C}}(\alpha) = \{-\gamma^f\}$$

Montrons que la classe de C-équivalence de  $-\gamma^f$  est réduite à un élément. Pour cela il suffit de voir que  $-\gamma^f$  n'est C-lié à aucun élément et qu'aucun élément ne lui est C-lié. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que  $\delta$  soit C-lié à  $-\gamma^f$ . On a alors :

$$\delta \in \Gamma'_{+} \ et \ A(-\gamma^{f}) = A'\delta$$
 (4.16)

On déduit des conditions 1), 2) de la Proposition 10 :

$$A^{-1}\gamma = A'^{-1}(-\delta^f) \tag{4.17}$$

D'après (4.16) et la condition 1),  $A'^{-1}(-\delta^f$  est un élément de  $\Gamma'_+$ . Par ailleurs, d'après la définition de  $\gamma$ ,  $A^{-1}\gamma$  est égal à  $\alpha$ . Joint à (4.17), cela montre que  $\alpha$  est élément de  $\Gamma'_+$ , ce qui contredit (4.15). Donc aucun élément n'est C-lié à  $-\gamma^f$ .

On montre de même que  $-\gamma^f$  n'est lié à aucun élément. Cecci achève de prouver (i).

Si  $\beta$  est C-lié à  $\beta'$ , on a  $A\beta' = A'\beta$ . Par ailleurs, d'après les conditions 4) et 5) de la proposition 10, on a :

$$u^{\beta} = u^{A'\beta}, \ u^{\beta'} = u^{A\beta'}$$

La première égalité de (ii) en résulte.

Pour la deuxième égalité, on remarque, que si  $\alpha \in \Gamma_+$ , on a, d'après la condition 4) de la Proposition 10 :

$$u^{\alpha} = u^{A\alpha}$$

Mais, il résulte de la définition de u que :

$$u^f = \overline{u}^{-1} \tag{4.18}$$

On en déduit le résultat voulu.

Le théorème suivant a été suggéré par un résultat de A. Panov (cf. [P1], Théorème 6.13) et la preuve que nous en donnons plus loin.

**Théorème 6** Soit B une forme de Manin réelle sur  $\mathfrak{g}_1$ . Tout triple de Manin réel dans  $\mathfrak{g}_1$ , relativement à B, est conjugué par un élément de  $G_1$  à un triple fortement standard dont le complexifié est de la forme  $\mathfrak{T}_{B\mathcal{D},t\mathcal{W}}$ , où t est un élément de  $J_0$  et  $B\mathcal{D}=(A,A',\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}},\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$  une donnée de Belavin-Drinfeld généralisée pour  $\mathfrak{g}$  et  $B_{\mathbb{C}}$ , qui vérifie, outre les conditions 1) à 5) de la Proposition 10 :

1)

$$u^2 = 1$$

- 2) Pour tout  $\alpha \in Gamma^+ \setminus \Gamma_0 : u_1^{\alpha} = 1$ .
- 3)  $t = (v_1, 1), où u_1 \in J_1$ .

Alors  $v_1^2 = 1$ 

**Remarque** 4 Pour une classe de conjugaison sous  $G_1$  de triples réels de  $\mathfrak{g}_1$ , relativement à B, la donnée  $\mathcal{BD}$  est uniquement déterminée, d'après le Théorème 5 et il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles pour t, car les éléments de carré 1 de  $J_1$  sont en nombre fini.

### Démonstration :

Tenant compte du fait que u n'est pas changé par la mutiplication de t par un élément de la forme  $(t_1, \overline{t}_1)$ , on voit qu'il suffit de trouver t satisfaisant toutes les conditions à l'exception de 3). D'après la Proposition 10, il existe  $\underline{t}$  et  $\mathcal{BD}$  satisfaisant les conditions 1) à 5) de celle-ci (en y changeant t en  $\underline{t}$ ). On vérifie aisément que si  $t' \in J_0$  satisfait:

$$t'^{\alpha} = t'^{A\alpha}, \alpha \in \Gamma_{+} \tag{4.19}$$

$$t'^{\alpha} = t'^{A'\alpha}, \alpha \in \Gamma'_{+} \tag{4.20}$$

on a:

$$\mathfrak{T}_{\mathbb{BD},\underline{t}\mathcal{W}}=\mathfrak{T}_{\mathbb{BD},\underline{t}t'\mathcal{W}}$$

Il reste à choisir t' vérifiant (4.19) et (4.20) de telle sorte que  $t = \underline{t}t'$  vérifie les propriétés voulues.

On choisit un sous-ensemble  $\Theta$  de  $\Sigma_+$ , tel que toute classe de C-équivalence soit de la forme  $\mathcal{C}(\alpha)$  ou  $\check{\mathcal{C}}(\alpha)$  pour un unique  $\alpha \in \Theta$ .

On remarque que si  $A\alpha = A'\beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont C-équivalents. On caractérise alors t' par  $t^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \Sigma$ . On choisit pour tout  $\alpha \in \Sigma_+$ , une racine carrée  $z_\alpha$  de  $\overline{(\underline{u}^{\alpha})}^{-1}$ , où  $\underline{u} = \overline{t}(\underline{t}^f)^{-1}$ . On pose alors, pour  $\alpha \in \Theta$ :

$$t'^{\beta} = z_{\alpha}, \ si \ \beta \in \mathcal{C}(\alpha), \ et \ si \ \alpha \notin \Gamma_0$$
 (4.21)

$$t'^{\beta} = z_{\alpha} \ (resp. \ \overline{z_{\alpha}}), \ si \ \beta \in \mathfrak{C}(\alpha)(resp. \ \beta \in \check{\mathfrak{C}}(\alpha)) \ et \ si \ \mathfrak{C}(\alpha) \neq \check{\mathfrak{C}}(\alpha) \ (4.22)$$

$$t'^{\beta} = |u_{\alpha}|^{-1/2} \ si \ \alpha \in \Gamma_0 \ est \ tel \ que \ \mathfrak{C}(\alpha) = \check{\mathfrak{C}}(\alpha), \ et \ \beta \in \mathfrak{C}(\alpha)$$
 (4.23)

Ceci détermine  $t'^{\beta}$  pour  $\beta \in \Sigma_+$ , et l'on pose :

$$t'^{\beta^f} = \overline{(t'^\beta)^{-1}}, \beta \in \Sigma_+ \tag{4.24}$$

Ainsi t' est entièrement caractérisé par les relations (4.21) à (4.24). Il faut voir que t' vérifie (4.19) et(4.20). Soit  $\beta \in \Gamma_+$ . On suppose  $\beta \in \mathcal{C}(\alpha)$ ,  $\alpha \in \Theta$ . D'après (4.24), on a :

$$t'^{A\beta} = \overline{t}'^{-(A\beta)^f}$$

Mais, d'après la condition 1) de la Proposition 10, et la définition de  $\check{\mathbb{C}}(\alpha)$ , on a :  $-(A\beta)^f = A^{-1}(-\beta^f) \in \check{\mathbb{C}}(\alpha)$ , donc , d'après (4.22) et (4.23), on a :

$$\overline{t'^{-(A\beta)f}} = t'^{\beta}$$

On traite de même le cas où  $\beta \in \check{\mathbb{C}}(\alpha)$ , et alors  $\alpha \in \Theta$ . Ceci prouve que (4.19) est vérifié. On prouve (4.20) de la même manière.

Calculons  $v_{\beta} := \overline{t}'^{\beta}(t'^{-1})^{\beta^f}$ ,  $\beta \in \Sigma_+$  A l'aide de (4.22) à (4.24) et du Lemme 23, on voit que pour  $\alpha \in \Theta$ :

$$v_{\beta} = u^{-\beta}$$
,  $si \ \beta \in \mathfrak{C}(\alpha) \cup \check{\mathfrak{C}}(\alpha)$ ,  $et \ si \ \alpha \notin \Gamma_0 \ ou \ si \ \mathfrak{C}(\alpha) \neq \check{\mathfrak{C}}(\alpha)$ 

$$v_{\beta} = |u|^{-\beta}$$
, si  $\alpha \in \Gamma_0$  est tel que  $\mathfrak{C}(\alpha) = \check{\mathfrak{C}}(\alpha)$ , et  $\beta \in \mathfrak{C}(\alpha)$ 

Par ailleurs il résulte du Lemme 23:

$$u^{\beta}$$
 est réel si  $\alpha \in \Gamma_0$  est tel que  $\mathfrak{C}(\alpha) = \check{\mathfrak{C}}(\alpha)$ , et si  $\beta \in \mathfrak{C}(\alpha)$ 

Alors il est clair que  $t:=t'\underline{t}$  vérifie la condition 2) du Théorème et l'élément u correspondant vérifie :

$$u^{\alpha} = 1 \ ou - 1, \alpha \in \Sigma_{+}$$

$$u^{f} = \overline{u}^{-1}$$

Il en résulte que  $u^2 = 1$  comme désiré.

## 4.2 Une autre démonstration d'un résultat d'A. Panov

On suppose maintenant que  $\mathfrak{g}_1$  est une algèbre de Lie complexe simple et on pose  $B_1 = Im K_{\mathfrak{g}_1}$ . On fixe une forme réelle  $\mathfrak{h}_1$  de  $\mathfrak{g}_1$  et  $\sigma_1$  la conjugaison de  $\mathfrak{g}_1$  par rapport à  $\mathfrak{h}_1$ .

On note  $G_1$  le groupe adjoint de  $\mathfrak{g}_1$  (et non son recouvrement universel) et, si  $\mathfrak{e}$  est une sous-algèbre de Lie réelle de  $\mathfrak{g}_1$ , on note E le sous-groupe analytique de  $G_1$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{e}$ .

On s'intéresse aux triples de Manin réels de  $\mathfrak{g}_1$ ,  $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  tels que  $\mathfrak{i}_1$  soit égal à  $\mathfrak{h}_1$ , qu'on appelle " $\mathfrak{h}_1$ -triple", à conjugaison près par les élément de  $G_1$ , ou, ce qui revient au même, par ceux de  $G_1^{\sigma_1}$ , qui est l'ensemble des éléments de  $G_1$  commutant à  $\sigma_1$ . Ces triples décrivent les structures de bigèbres de Lie sur  $\mathfrak{h}_1$ , dont le double est isomorphe à  $\mathfrak{g}_1$  (cf. [P1]).

Soit  $\mathfrak{f}_1$  une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{h}_1$  et soit  $\mathfrak{j}_1$  la complexifiée de  $\mathfrak{f}_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . On choisit une sous-algèbre de Borel,  $\mathfrak{b}_1$ , de  $\mathfrak{g}_1$ , contenant  $\mathfrak{j}_1$  et telle que  $\sigma_1(\mathfrak{b}_1)$  soit égal à la sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{b}'_1$ , opposée à  $\mathfrak{b}_1$ , relativement à  $\mathfrak{j}_1$ . On note  $\Sigma_1$  l'ensemble des racines simples de  $\mathfrak{j}_1$  dans  $\mathfrak{b}_1$ .

On note  $\theta$  l'involution de  $\Sigma_1$ , caractérisée par :

$$\sigma_1(\mathfrak{g}_1^{-\alpha}) = \mathfrak{g}_1^{\theta(\alpha)} \tag{4.25}$$

En calulant de deux manières différentes  $t(\sigma_1(X))$ , pour  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ , on trouve :

$$\overline{(t^{\sigma_1})^{\alpha}} = \overline{t^{-\theta(\alpha)}} \tag{4.26}$$

Il est facile de voir qu'on peut choisir un système de générateurs de Weyl de  $\mathfrak{g}_1$ ,  $\mathcal{W}_1$ , relativement à  $\Sigma_1$ , tel que :

$$\sigma_1(H_\alpha) = H_{-\theta(\alpha)}, \ \sigma_1(X_\alpha) = \varepsilon_\alpha Y_{\theta(\alpha)}, \ \sigma_1(Y_\alpha) = \varepsilon_\alpha X_{\theta(\alpha)}$$
 (4.27)

où:

$$\varepsilon_{\alpha} = 1 \ ou \ -1, \ et \ \varepsilon_{\alpha} = 1 \ si \ \theta(\alpha) \neq -\alpha$$
 (4.28)

On note  $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{j}_0 = \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$ ,  $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}'_1$ . On note  $\eta_1$  l'aplication de  $\mathfrak{g}_1$  dans  $\mathfrak{g}$  définie par :

$$\eta_1(X) = (X, \sigma_1(X)), X \in \mathfrak{g}_1$$

dont l'image par  $\eta_1$  est une forme réelle de  $\mathfrak{g}$ . On note  $j_1$  la conjugaison de  $\mathfrak{g}$  par rapport à cette forme réelle, qui vérifie :

$$j_1(X,Y) = (\sigma_1(Y), \sigma_1(X)), X, Y \in \mathfrak{g}_1$$

On note  $W = (W_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times W_1)$ . On note B la forme de Manin sur  $\mathfrak{g}$ , égale à  $K_{\mathfrak{g}_1}$  sur le premier facteur et à  $-K_{\mathfrak{g}_1}$  sur le deuxième facteur facteur. Alors  $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_1 \times \{0\}$ ,  $\mathfrak{g}_- = \{0\} \times \mathfrak{g}_1$  et  $\Sigma_+ = \Sigma_1$ ,  $\Sigma_- = \Sigma_1$  Si V est un sous-espace vectoriel réel de  $\mathfrak{g}_1$ , on notera :

$$V_{\mathbb{C}} := \eta_1(V) + i\eta_1(V)$$

On remarque que  $\mathfrak{h}_{1\mathbb{C}}$  est égal à la diagonale,  $diag(\mathfrak{g}_1)$ , dans  $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ . Si  $\mathfrak{T}_1 = (B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$  est un triple de Manin réel dans  $\mathfrak{g}_1$ , on appelle triple complexifié de  $\mathfrak{T}_1$ , le triple de Manin complexe dans  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{T}_{1\mathbb{C}} = (B, \mathfrak{i}_{1\mathbb{C}}, \mathfrak{i}'_{1\mathbb{C}})$ . Alors  $\mathfrak{i}_{1\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{i}'_{1\mathbb{C}}$  sont stables par  $j_1$ . De plus si on a deux triples réels dans  $\mathfrak{g}_1$ , comme ci-dessus, ils sont conjugués par un élément de  $G_1$  si et seulement si leurs complexifiés sont conjugués par un élément de  $\eta_1(G_1) = \{(g_1, g_1^{\sigma_1}) | g_1 \in G_1\}$ . On remarque que si deux sous-espaces vectoriels complexes de  $\mathfrak{g}$  sont conjugués par un élément de  $\eta_1(G_1)$ , si l'un est stable par  $j_1$ , l'autre l'est aussi.

De plus le complexifié d'un triple fortement standard relativement à  $\mathfrak{b}_1$ ,  $\mathfrak{j}_1$ , est fortement standard relativement à  $\mathfrak{b}_0$ ,  $\mathfrak{j}_0$ , car il est facile de voir que le complexifié d'un antécédent est l'antécédent du complexifié.

Comme tout triple de Manin réel dans  $\mathfrak{g}_1$  est conjugué par un élément de  $G_1$ , à un triple fortement standard, d'après le Théorème 4, on a immédiatement :

#### Lemme 24

- (i) Si  $\mathfrak{I}_1$  est un " $\mathfrak{h}_1$ -triple", son complexifié est conjugué par un élément de  $\eta_1(G_1)$  à un triple fortement standard  $\mathfrak{T}=(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$  tel que :
- 1) i est conjugué par un élément de  $\eta_1(G_1)$  à diag $(\mathfrak{g}_1)$ .
- 2)  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$  sont stables par  $j_1$ .
- (ii) Si  $\mathfrak{T} = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  est un triple de Manin fortement standard vérifiant 1), 2), il existe un " $\mathfrak{h}_1$ -triple", unique à conjugaison sous  $G_1$  près (où plutôt  $G_1^{\sigma_1}$  près) tel que son complexifié soit conjugué à  $\mathfrak{T}$  par un élément de  $\eta_1(G_1)$ . Deux triples fortement standard, associés à B, vérifant 1), 2), conjugués sous  $\eta_1(G_1)$ , conduisent à la même classe de conjugaison sous  $G_1^{\sigma_1}$  de " $\mathfrak{h}_1$ -triple".

## Lemme 25

- (i) Tout triple de Manin complexe, fortement standard dans  $\mathfrak{g}$  pour  $\mathfrak{b}_0$ ,  $\mathfrak{j}_0$ , associé à B, vérifiant les conditions 1), 2), du Lemme précédent est conjugué par un élément de  $\eta_1(G_1)$  à un triple  $\mathfrak{T}_{\mathcal{BD},(1,t)(W)}$ , vérifiant les mêmes conditions, où  $\mathcal{BD}$  est une donnée de Belavin-Drinfeld  $(A,\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}},A',\mathfrak{i}'_{\mathfrak{a}'})$ , relativement à B et t est un élément de  $J_1$ .
- (ii) Le fait que  $\mathfrak{T}_{\mathfrak{BD},(1,t)(\mathcal{W})}$  vérifie les conditions 1), 2) du Lemme précédent équivant à:
- 1) Il existe un élément  $g_1 \in G_1$ , tel que  $t = g_1^{\sigma_1} g_1^{-1}$ . En particulier on a  $t^{\sigma_1} = t^{-1}$
- 2)  $\Gamma_+ = \Sigma_1$ , et A est l'identité.
- 3)  $i_a = \{0\}$

4)

$$\theta(\Gamma'_+) = \Gamma'_-, \ et \ \theta(A'\alpha) = A'^{-1}(\theta(\alpha)), \ \varepsilon_{A'\alpha}t^{A'\alpha} = \varepsilon_\alpha t^\alpha, \ \alpha \in \Gamma'_+$$

5) L'espace  $\mathfrak{i}'_{\mathfrak{a}'}$  est stable par  $j_1$ .

#### Démonstration :

Soit  $\underline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_{\mathcal{BD},(t_1,t_2)(\mathcal{W})}$  un triple de Manin fortement standard, vérifiant les conditions 1), 2) du Lemme précédent, où  $t_1, t_2 \in J_1$ . Alors  $\underline{\mathcal{T}}$  est conjugué par  $(t_1, t_1^{\sigma_1}) \in \eta_1(G_1)$  à  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\mathcal{BD},(1,t)(\mathcal{W})}$ , où  $t = t_1^{-\sigma_1}t_2$ , qui vérifie les conditions 1) et 2) du Lemme précédent. Montrons que cela implique les propriétés 1) à 5) ci-dessus.

Ecrivons  $\mathfrak{T}=(B,\mathfrak{i},\mathfrak{i}')$ . On obtient 1) en écrivant que  $\mathfrak{i}$  est conjugué par un élément de  $\eta_1(G_1)$  à  $diag(\mathfrak{g}_1)$ .

Alors  $\mathfrak{i}$  est semi-simple, donc sous  $\mathfrak{g}$ . Par suite, avec les notations du Théorè me 1, on a  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$  et  $\Gamma_+ = \Sigma_1$ . Alors, utilisant les notations du Lemme 22,  $\mathfrak{i} = \{(X, \tau(X)) | X \in \mathfrak{g}_1\}$ . Comme  $\mathfrak{i}$  est conjugué par un élément de  $\eta_1(G_1)$  à  $diag(\mathfrak{g}_1)$ , cela implique que l'automorphisme  $\tau$  de  $\mathfrak{g}_1$  est intérieur. Or, par définition,  $\tau$  préserve  $\mathfrak{j}_1$ , et l'inverse du transposé de sa restriction à  $\mathfrak{j}_1$  induit A sur  $\Sigma_1$ . Comme A préserve  $\Sigma_1$ , A doit être l'identité. On a donc prouvé 2). 3) résulte du fait que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ , donc  $\mathfrak{a} = \{0\}$ .

On traduit maintenant le fait que i' est stable par  $j_1$ . Cela implique que  $\mathfrak{p}'$  est stable par  $j_1$ . Comme  $\mathfrak{j}_0$  est stable par  $j_1$ , joint à (4.25), cela implique aussi que  $\mathfrak{m}'$  est stable par  $j_1$ . Cela conduit immédiatement à la première égalité de 4). Les deux autres sont obtenues en traduisant la stabilité de  $\mathfrak{h}'$  par  $j_1$ . Plus précisément on pose :

$$U = (X_{\alpha}, t^{A'\alpha} X_{A'\alpha}) \in \mathfrak{h}', \ \alpha \in \Sigma_1$$

On a, en tenant compte de (4.27) et de l'antilinéarité de  $\sigma_1$ :

$$j_1(U) = (\overline{t^{A'\alpha}} \varepsilon_{A'\alpha} Y_{\theta(A'\alpha)}, \varepsilon_{\alpha} Y_{\theta(\alpha)})$$

La stabilité de  $\mathfrak{h}'$  par  $j_1$ , implique que  $\theta(A'\alpha)$  est élément de  $\Gamma'_+$  et  $j_1(U)$  doit être un multiple scalaire de :

$$V = (Y_{\theta(A'\alpha)}, t^{A'\theta(A'\alpha)} Y_{A'\theta(A'\alpha)})$$

Les deux premières égalités de 4) en résulte immédiatement et l'on obtient en outre :

$$\varepsilon_{A'\alpha}t^{A'\alpha} = \varepsilon_{\alpha}t^{\theta(\alpha)}$$

En utilisant (4.26) et le fait que  $t^{\sigma_1} = t^{-1}$ , on aboutit à la troisième égalité de 4).

La condition 5) est immédiate.

On procède de même pour la réciproque.

**Lemme 26** Soit t,  $\mathfrak{BD}$  vérifiant les conditions 1) à 5) du Lemme précédent. Soit  $t' \in J_1$  tel que :

$$t'^{A'\alpha} = t'^{\alpha}, \ \alpha \in \Gamma'_{+}$$

Alors, on  $a: \Upsilon_{\mathcal{BD},(1,t)(\mathcal{W})} = \Upsilon_{\mathcal{BD},(t',t't)(\mathcal{W})}$ , et  $\Upsilon_{\mathcal{BD},(1,t)(\mathcal{W})}$  est conjugué par  $(t',t'^{\sigma_1}) \in \eta_1(G_1)$  à  $\Upsilon_{\mathcal{BD},(1,(t't'^{-\sigma_1})t)(\mathcal{W})}$ .

#### Démonstration :

Notons  $\mathfrak{T}_{\mathcal{BD},(1,t)\mathcal{W}} = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$  et utilisons les notations du Théorème 1. La stabilité de  $\mathfrak{i}$  par (t',t') est claire. Par ailleurs,  $(t',t') \in J_0$  laisse stable  $\mathfrak{p}'$ , donc  $\mathfrak{n}'$  et laisse fixe point par point les éléments de  $\mathfrak{a}'$ . Il reste à voir que  $\mathfrak{h}'$  est invariant. Mais cette algèbre est engendrée par :

$$(X_{\alpha}, t^{A'\alpha} X_{A'\alpha}), (Y_{\alpha}, t^{-A'\alpha} Y_{A'\alpha}), \alpha \in \Gamma'_{+}$$

Le Lemme en résulte immédiatement.

Si  $\alpha \in \Gamma_0 := \Gamma'_+ \cup \Gamma_-$ , on note  $\mathcal{C}(\alpha)$ , l'ensemble des  $\beta \in \Gamma_0$  tels qu' il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\alpha, A'\alpha, \dots, A'^{m-1}\alpha \in \Gamma'_+, \ et \ \beta = A'^n\alpha$$

ou:

$$\beta, A'\beta, \dots, A'^{n-1}\beta \in \Gamma'_{+}, \ et \ \alpha = A'^{n}\beta$$

Les  $\mathcal{C}(\alpha)$  sont soit distincts soit confondus. De plus la deuxième égalité de la condition 4) du Lemme 25, montre facilement :

$$\theta(\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\theta\alpha) \tag{4.29}$$

(cf [P1], Lemme 4.11, pour un Lemme analogue) Par ailleurs, grâce à la définition de de  $\varepsilon_{\alpha}$ , on a :

$$\varepsilon_{\theta(\alpha)} = \varepsilon_{\alpha}, \ \alpha \in \Sigma_1$$
 (4.30)

Le Théorème suivant est du à A. Panov (cf. [P], Théorèmes 4.5, 4.13).

#### Théorème 7

- (i) Le complexifié d'un  $\mathfrak{h}_1$ -triple est conjugué par un élément de  $\eta_1(G_1)$  à un triple  $\mathfrak{T}_{\mathbb{BD},(1,u)(\mathbb{W})}$ , où u,  $\mathbb{BD}$  vérifient les conditions 1) à 5) du Lemme 25 (avec t remplacé par u) et u vérifie de plus :
- 1)  $u^{\sigma_1} = u = u^{-1}$
- 2)  $u^{\alpha} = 1$  ou -1,  $si \ \alpha \in \Sigma_1$
- 3)  $u^{\alpha} = 1$ ,  $si \ \alpha \in \Sigma_1 \setminus \Gamma_0 \ et \ \theta(\alpha) \neq \alpha$ , ou  $si \ \alpha \in \Gamma_0 \ et \ \theta(\mathfrak{C}(\alpha) \neq \mathfrak{C}(\alpha)$
- (ii) Réciproquement si u et  $\mathfrak{BD}$  vérifient les propriétés ci-dessus (i.e. 1) et 2) de (i) et les conditions 1) à 5) du Lemme 25),  $\mathfrak{T}_{\mathfrak{BD},(1,u)W}$  est conjugué au complexifié d'un  $\mathfrak{h}_1$ -triple, unique modulo la conjugaison de  $G_1^{\sigma_1}$ .
- (iii) Dans le cas où  $\mathfrak{f}_1$  est l'algèbre de Lie d'un tore maximal compact dans  $G_1$ ,  $\theta$  est triviale,  $\Gamma_+$  est vide et les conditions sur u ci-dessus se réduisent aux deux premières, outre celles du Lemme 25.

## Démonstration :

On sait que le complexifié d'un  $\mathfrak{h}_1$ -triple est conjugué par un élément de  $\eta_1(G_1)$  à un triple  $\mathfrak{T}_{\mathcal{BD},(1,t)\mathcal{W}}$ , où t,  $\mathcal{BD}$  vérifient les conditions 1) à 5) du Lemme 26 (avec t remplacé par u.

L'idée est d'appliquer le Lemme 25, avec t' bien choisi. Il suffit de définir  $t'^{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Sigma_1$ .

On établit d'abord quelques résultats auxiliaires.

On rappelle que d'après (4.26) et la condition 1) du Lemme 25, on a :

$$\overline{t^{\theta(\alpha)}} = t^{\alpha}, \ \alpha \in \Sigma_1 \tag{4.31}$$

Par ailleurs, d'après la troisième égalité de la condition 4) du Lemme 25 , on a :

$$t^{A'\alpha} = \varepsilon_{A'\alpha}\varepsilon_{\alpha}t^{\alpha}, \ \alpha \in \Gamma'$$

d'où l'on déduit :

$$t^{\beta} = \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\beta'} t^{\beta'}, \ \beta, \beta' \in \mathcal{C}(\alpha), \ \alpha \in \Gamma_0$$
(4.32)

Enfin la condition 4) du Lemme 25 montre que :

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\theta(\alpha)}, \ \alpha \in \Sigma_1$$
 (4.33)

Pour définir  $t'^{\alpha}$ , on distingue plusieurs cas. On note  $\Sigma_{1*}$ , un sous-ensemble de  $\Sigma_{1}$  tel que tout  $\beta \in \Sigma_{1}$  soit élément d'un  $\mathcal{C}(\alpha)$  pour un unique  $\beta$  appartenant à  $\Sigma_{1*} \cup \theta(\Sigma_{1*})$ , et tel que les éléments de l'intersection de  $\Sigma_{1*}$  et  $\theta(\Sigma_{1*})$  soient fixés par  $\theta$ .

Soit  $\alpha \in \Sigma_{1*}$ :

1) Si  $\alpha \notin \Gamma_0$ , et  $\theta(\alpha) = \alpha$ , (4.31) implique que  $t^{\alpha}$  est réel et on pose :

$$t'^{\alpha} = |t^{-\alpha}|^{1/2}$$

2) Si  $\alpha \notin \Gamma_0$ , et  $\theta(\alpha) \neq \alpha$ , on note z une racine carrée de  $t^{-\alpha}$ , et on pose :

$$j^{\alpha} = z, \ j^{\theta(\alpha)} = \overline{z}$$

3) Si  $\alpha \in \Gamma_0$  et  $\theta(\mathcal{C}(\alpha)) = \mathcal{C}(\alpha)$ , on a, d'après (4.32) :

$$t^{\theta(\alpha)} = \varepsilon_{\theta(\alpha)} \varepsilon_{\alpha} t^{\alpha}$$

Tenant compte de (4.31), cela implique que  $t^{\alpha}$  est réel. On note z une racine carrée de  $|t^{-\alpha}|$ , et on pose :

$$t'^{\beta} = z, \ \beta \in \mathcal{C}(\alpha)$$

4) Si  $\alpha \in \Gamma_0$  et  $\theta(C(\alpha)) \cap C(\alpha) = \emptyset$ , on note z une racine carrée de  $t^{-\alpha}$ , et on pose :

$$t'^{\beta} = z, \ t'^{\theta(\beta)} = \overline{z}, \ \beta \in C(\alpha)$$

On voit que les relations précédentes définissent t', qui vérifie :

$$t'^{A'\alpha} = t'^{\alpha}, \ \alpha \in \Gamma'_{+}$$

Le Lemme 25 et les conditions imposées à t' montrent que  $u := t't'^{-\sigma_1}t$  vérifie les conditions voulues.

(ii) est un cas particulier du Lemme 25 (ii).

Traitons le cas où  $\mathfrak{f}_1$  est l'algèbre de Lie d'un tore maximal compact de  $\mathfrak{g}_1$ . Alors  $\mathfrak{f}_1$  est l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{j}_1$  sur lesquels toutes les racines sont imaginaires pures.

Tout  $\mathfrak{h}_1$ -triple est conjugué sous  $G_1$  à un triple réel fortement standard  $(B_1,\mathfrak{i}_1,\mathfrak{i}'_1)$ . Alors  $\mathfrak{i}_1\cap\mathfrak{j}_1$ , qui est conjugué par  $G_1$  à  $\mathfrak{f}_1$ , est l'algèbre de Lie d'un tore maximal compact de  $G_1$ , donc est égal à  $\mathfrak{f}_1$ . Par ailleurs  $\mathfrak{h}'_1\cap\mathfrak{j}_1$  est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{h}'_1$ . Son intersection avec  $\mathfrak{f}_1$  est donc non réduite à zéro sauf si  $\mathfrak{h}'_1$  est réduite à zéro. On en déduit que la sous-algèbre Lagrangienne  $\mathfrak{i}'_1$  est sous une algèbre de Borel. Par complexification, il en résulte que dans (i), on doit avoir  $\Gamma'_+ = \emptyset$  La définition de  $\theta$  et le fait que les racines soient imaginaires pures sur  $\mathfrak{f}_1$  montrent que  $\theta$  est l'identité. Ceci achève la preuve du Théorème.

#### Références

- [BD], BELAVIN A., DRINFELD G., Triangle equations and simple Lie algebras, Mathematical Physics Reviews, vol. 4, 93-165
- [Bor], BOREL A., Linear algebraic groups, Second Enlarged Edition, Graduate Text in Math.126, 1991, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg. [Bou], BOURBAKI N., Groupes et Algèbres de Lie, Chapitre I, Chapitres IV, V, VI, Chapitres VII, VIII, Actualités Scientifiques et Industrielles 1285, 1337, 1364, Hermann, Paris, 1960, 1968, 1975.
- [De], DELORME P., Sur les triples de Manin pour une algèbre réductive complexe, Preprint 1999.
- [G], GANTMACHER F., Canonical representation of automorphism of a semisimple Lie group, Math Sb., 47, (1939), 101-144.
- [K1], KAROLINSKY E., A classification of Poisson homogeneous spaces of a compact Poisson Lie group, Math. Phys., Anal. and Geom., 3 (1996), 545-563.
- [K2], KAROLINSKY E., A classification of Poisson homogeneous spaces of a compact Poisson Lie group, Dokl. Ak. Nauk, 359 (1998), 13-15.
- [K3], KAROLINSKY E., A classification of Poisson homogeneous spaces of a reductive complex Poisson Lie group, Preprint, 1999
- [M1], MATSUKI T., The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), 331-357.
- [M2], MATSUKI T., Orbits of affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups, Hiroshima J. Math., 12 (1982), 307-320.
- [P1], PANOV A.., Manin triples of real simple Lie algebras, Part 1, Preprint.
- [P2], PANOV A., Manin triples of real simple Lie algebras, Part 2, Preprint, QA 9905028.
- [W], WARNER G., Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups, Grundleh ren der math. Wis. in Einz., Vol 188, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972

Institut de Mathématiques de Luminy, U.P.R. 9016 du C.N.R.S. Université de la Méditerrannée, 163 Avenue de Luminy, Case 907, 13288, Marseille Cedex 09, France e-mail: delorme@iml.univ-mrs.fr